Planche HEC : variables aléatoires à densité (1)

Exercice sans préparation 1

Soit λ un réel strictement positif.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On note $V = \max(X, 1 - X)$ le maximum de X et de $1 - X$, et l'on admet que V est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Déterminer $V(\Omega)$, l'ensemble des valeurs possibles pour la variable aléatoire V.

2. Déterminer la fonction de répartition de V. V est-elle une variable aléatoire à densité ?

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

1. On remarque tout d'abord que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x \geqslant 1 - x \iff x \geqslant \frac{1}{2} \quad (*)$$

On pose $g : x \mapsto \max(x, 1-x)$, de sorte que $V = g(X)$.
On sait que $X(\Omega) = [0, +\infty[$. D'où $V(\Omega) = g([0, +\infty[)$.
D'après $(*)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{si } x < \frac{1}{2} \end{cases}$.
On en déduit que g est décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

$$\boxed{\text{D'où : } V(\Omega) = \left[\tfrac{1}{2}, +\infty\right[.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
<u>Premier cas :</u> $x < \frac{1}{2}$.
Alors $F_V(x) = 0$.
<u>Deuxième cas :</u> $x \geqslant \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}([V \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [1 - X \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [X \geqslant 1 - x]) \\ &= \mathbb{P}([1 - x \leqslant X \leqslant x]) && \textit{(on a bien } x \geqslant 1 - x \textit{ d'après } (*)\textit{)} \\ &= F_X(x) - F_X(1-x) && \textit{(car } X \textit{ est à densité)} \end{aligned}$$

- Premier sous-cas : $x \leqslant 1$.
  Alors

$$\begin{aligned} F_V(x) &= (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda(1-x)}) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda(1-x)} - \mathrm{e}^{-\lambda x} \end{aligned}$$

- Deuxième sous-cas : $x > 1$.
  Alors

$$F_V(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Conclusion :

$$\boxed{F_V : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 1 \\ \mathrm{e}^{-\lambda(1-x)} - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \end{cases}}$$

La fonction F_V est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est en particulier vrai en $\frac{1}{2}$ et en 1) et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé de $\frac{1}{2}$ et de 1.

$$\boxed{\text{On peut alors conclure que } V \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$