Planche HEC : variables aléatoires à densité (2)

Exercice avec préparation 1
Pour tout nombre réel x, on pose :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad S(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t)\ dt$$

1. ***a)*** Question de cours : propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

b) Donner l'allure du graphe de la fonction S.

2. Soit X une variable aléatoire, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant la loi normale centrée réduite.

a) `(Cubes uniquement)` Pour tout $x > 0$, justifier l'inégalité : $\mathbb{P}([\ |X| > x\ ]) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

b) Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\ dx$.

3. ***a)*** Justifier, pour tout réel $A > 0$, l'égalité :

$$\int_0^A S(x)\ dx \ = \ A\, S(A) + \int_0^A x\, \varphi(x)\ dx$$

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\ dx$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = S(x)\, \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.

a) À l'aide du théorème d'intégration par parties, montrer :

$$\forall x > 0, \quad \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x\,\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \ \leqslant \ S(x) \ \leqslant \ \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x\,\sqrt{2\pi}}$$

b) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ est-elle convergente ?

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

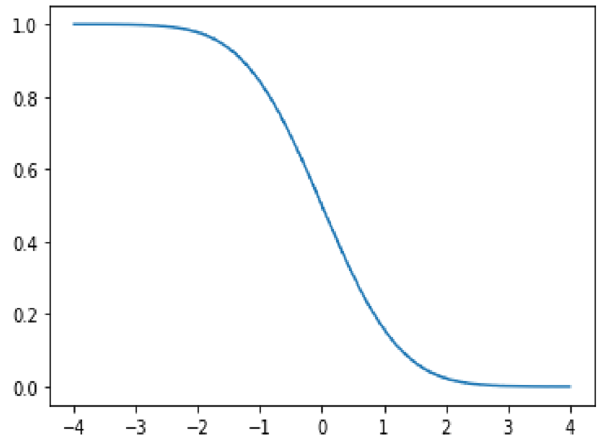
1. a) La fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

b) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \mathbb{P}([X \geqslant x])$. On peut alors calculer une approximation de $S(x)$ par une méthode de Monte-Carlo. On propose le code **Python** suivant :

```
def S(x):
    N = 10**5
    simu = [rd.normal(0,1) for k in range(N)]
    compteur = [1 for s in simu if s >= x]
    return sum(compteur)/N

abscisse = np.linspace(-4, 4, 1000)
ordonnee = [S(x) for x in abscisse]
plt.plot(abscisse, ordonnee)
plt.show()
```

L'exécution du code **Python** donne la figure suivante :



De manière plus formelle, on remarque que $S = 1 - \Phi$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Les propriétés de S se déduisent alors des propriétés usuelles de Φ.

2. a) X admet une variance, on peut alors appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Puisque $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$, on obtient, pour tout $x > 0$:

$$\mathbb{P}([\ |X| > x\ ]) \leqslant \frac{1}{x^2}$$

b) La fonction S est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\ dx$ est impropre en $+\infty$.

Soit $x > 0$.

$$S(x) = \mathbb{P}([X \geqslant x]) = \mathbb{P}([X > x]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([\ |X| > x\ ]) \leqslant \frac{1}{2x^2}$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\ dx$ converge par critère de Riemann et par critère de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives.

3. a) Soit $A > 0$. On fait une IPP :

$$\left| \begin{array}{ll} u'(x) = 1 & u(x) = x \\ v(x) = S(x) & v'(x) = -\varphi(x) \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient alors immédiatement l'égalité

$$\int_0^A S(x)\ dx \ = \ A\,S(A) + \int_0^A x\,\varphi(x)\ dx$$

b) D'après le calcul fait en question ***2.b)***, pour tout $x > 0$,

$$0 \leqslant xS(x) \leqslant \frac{1}{2x}$$

Donc, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{x\to+\infty} xS(x) = 0$$

De plus, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\varphi(x)\ dx$ converge puisque X admet une espérance et

$$\int_0^A x\varphi(x)\ dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\ \right]_0^A$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} S(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

4. a) Soit $A > x > 0$. On remarque tout d'abord que :

$$\int_x^A \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^A \frac{1}{t}\ t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt$$

On fait une IPP :

$$\left|\begin{array}{ll} u'(t) = t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} & u(t) = -\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \\ v(t) = \dfrac{1}{t} & v'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A, x]$. On obtient alors immédiatement l'égalité

$$\int_x^A \frac{1}{t}\ t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = \left[\ -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\ \right]_x^A - \int_x^A \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\ dt$$

On fait tendre A vers $+\infty$ (c'est possible, tout converge), on obtient :

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{t}\ t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\ dt$$

Par théorème de positivité de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant) :

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{t}\ t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\ dt \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$$

ce qui donne la majoration en multipliant par $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

On refait une IPP dans l'intégrale $\displaystyle\int_x^A \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\ dt$ pour obtenir la minoration :

$$\left|\begin{array}{ll} u'(t) = t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} & u(t) = -\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \\ v(t) = \dfrac{1}{t^3} & v'(t) = -\dfrac{3}{t^4} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A, x]$. D'où

$$\int_x^A \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\, dt = \left[-\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^3} \right]_x^A - \int_x^A \frac{3e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^4}\, dt$$

On fait tendre A vers $+\infty$ (c'est possible, tout converge), on obtient :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^2}\, dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3} - \int_x^{+\infty} \frac{3e^{-\frac{t^2}{2}}}{t^4}\, dt \leqslant \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3}$$

On en déduit que :

$$\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \geqslant \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

On obtient la minoration voulue en multipliant par $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

b) D'après la question précédente, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}$$

Donc, par théorème d'encadrement :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ est divergente par critère d'équivalence et par critère de Riemann.