Exercice 1 : Soient n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On considère une urne U_1 contenant n boules numérotées de 1 à n et une urne U_2 contenant m boules numérotées de 1 à m. On effectue un unique tirage dans chacune de ces deux urnes et on note X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée dans l'urne U_1 (resp. U_2). Si l'on a tiré la boule i dans l'urne U_1 et la boule j dans l'urne U_2, alors on remplit une troisième urne U_3 avec i boules blanches et j boules noires. On effectue alors une succession de 10 tirages avec remise d'une boule dans l'urne U_3. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues lors de ces 10 tirages.

Compléter la fonction **Python** qui suit pour qu'elle renvoie une simulation de Y.

```
def simulY(n,m):
    X1 = rd.randint(1,n+1)
    X2 = rd.randint(1,m+1)
    return rd.binomial(10, X2/(X1+X2))
```

Expliquer ce que renvoie la fonction `mystere(n,m)` écrite ci-dessous. On citera le ou les résultat(s) du cours utilisé(s) et on justifiera leur utilisation.

```
def mystere(n,m):
    L = [simulY(n,m) for k in range(10**5)]
    return sum(L) / 10**5
```

Démonstration.
Cette fonction renvoie une réalisation de la moyenne empirique associée à la variable aléatoire Y. Puisque Y est finie ($Y(\Omega) = [\![0, 10]\!]$), elle admet une variance. Ainsi, d'après la loi faible des grands nombres, la fonction `mystere(n,m)` renvoie une approximation de $\mathbb{E}(Y)$. □

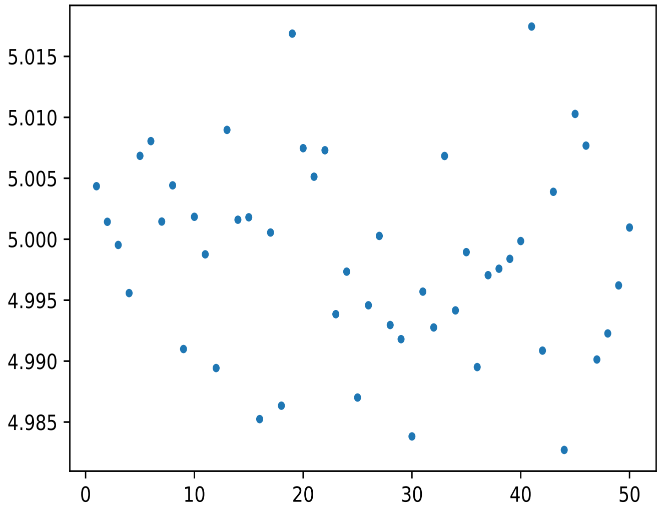
Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une approximation de la probabilité $\mathbb{P}([Y = 0])$.

```
def approx(n,m):
    S = 0
    for k in range(10**4):
        if simulX(n) >= n :
            S += 1
    return S / 10**4
```

On exécute le script suivant :

```
Xabs = [n for n in range(1,51)]
Yord = [mystere(n,n) for n in Xabs]
plt.plot(Xabs, Yord, '.')
```

et on obtient la figure ci-dessous :



Que peut-on conjecturer ?

Démonstration.
On trace la suite des espérances de la variable aléatoire Y lorsque $n = m$ et n varie entre 1 et 50. On peut conjecturer que lorsque $n = m$, on a $\mathbb{E}(Y) = 5$. $\square$