Colles de Mathématiques en E2A
v.a.r. à densité
Semaine 17 : 19-23 janvier

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre XIV : v.a.r. à densité

Il y a un gros effort à fournir sur ce chapitre pour réussir à manipuler les fonctions définies par morceaux :

- Savoir calculer leurs intégrales.
- Savoir trouver des formules quand on les compose avec d'autres fonctions (utile pour calculer des fonctions de répartition de transformée de v.a.r.).

Formulaire des lois usuelles à connaître par coeur pour les lois uniformes, exponentielles et normales.

1.1 Définitions

- Fonction de répartition d'une v.a.r. (rappel).
- Trois définitions différentes à ne pas confondre :
  1. X est une v.a.r. à densité.
  2. f est une densité de X, où X est une v.a.r. à densité.
  3. f est une densité de probabilité.
- Espérance d'une v.a.r. à densité : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx$.
- Moment d'ordre 2 d'une v.a.r. à densité : $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)\ dx$ et, plus généralement, moments d'ordre r.
- Variance d'une v.a.r. à densité : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$.
- Variable à densité centrée et réduite.
- Loi uniforme sur un intervalle borné, loi exponentielle.
- Lois normales.

1.2 Résultats

- Si X est à densité : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([X = x]) = 0$.
- Calcul de probabilités à l'aide d'une fonction de répartition pour une v.a.r. à densité :

$$\begin{array}{rcl} F_X(b) - F_X(a) & = & \mathbb{P}([a < X \leq b]) \\ & = & \mathbb{P}([a \leq X < b]) \\ & = & \mathbb{P}([a \leq X \leq b]) \\ & = & \mathbb{P}([a < X < b]) \end{array}$$

- Formule fondamentale (calcul de la fonction de répartition à l'aide d'une densité) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{F_X(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leq x]) \ = \ \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t}$$

  et ses conséquences (autres formules du théorème).
- La transformée affine d'une v.a.r. à densité est une v.a.r. à densité (à savoir redémontrer).
- Théorème de transfert.
- Propriétés de l'espérance et de la variance.
- Formule de Kœnig-Huygens : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.
- La transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi uniforme est encore une v.a.r. qui suit une loi uniforme (à savoir redémontrer).
- La transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi normale est encore une v.a.r. qui suit une loi normale.
- La somme de v.a.r. indépendantes qui suivent des lois normales est encore une v.a.r. qui suit une loi normale.

1.3 Méthodes

On renvoie aux détails du cours pour la marche à suivre. Il faut maîtriser les méthodes suivantes (et les schémas de rédaction qui vont avec) :

1. Montrer qu'une v.a.r. X est une v.a.r. à densité via sa fonction de répartition (très important).
2. Déterminer une densité à partir de la fonction de répartition (très important).
3. Déterminer la fonction de répartition à partir d'une densité (très important).
4. Démontrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité (très important).
5. Montrer qu'une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de répartition (peu important, à ne travailler que quand tout le reste est compris et maîtrisé).

De nombreux exercices font travailler sur des transformées de v.a.r. à densité. Il faut maîtriser les techniques vues en cours dans les exemples suivants :

1. Transformation affine : $Y = aX + b$ avec $a \neq 0$.
2. Transformation au carré : $Y = X^2$.
3. Transformation exponentielle : $Y = \mathrm{e}^X$.
4. Transformation usuelle : $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ avec $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1[)$ et $\lambda > 0$.
5. Transformation via la valeur absolue : $Y = |X|$ (penser à la formule des probabilités totales dès que l'on doit séparer des cas). *(plus difficile)*
6. Transformation via la partie entière : $Y = \lfloor X \rfloor$ (on obtient alors une v.a.r. discrète).

7. Minimum et maximum de plusieurs v.a.r. indépendantes de même loi : $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
8. Somme de deux v.a.r. à densité (hors programme et plus difficile, il faut donner le résultat de convolution si on veut poser un exo dessus) : $Y = U + V$.

Il faut connaître par cœur les rédactions usuelles pour montrer qu'une v.a.r. définie à l'aide d'autres v.a.r. admet une espérance :

1. Si par exemple $Z = 2X + 5$, on écrira : la v.a.r. Z admet une espérance car elle est la transformée affine d'une v.a.r. qui admet une espérance.
2. Si par exemple $Z = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, on écrira : la v.a.r. Z admet une espérance en tant que somme / combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent chacune une espérance.

Il faut également connaître par coeur les rédactions usuelles pour montrer qu'une v.a.r. admet une espérance / variance à l'aide d'une densité :

1. La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce qui revient à démontrer la convergence pour ce calcul de moment.
2. La v.a.r. X admet une variance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce qui revient à démontrer la convergence pour ce calcul de moment.

2 Questions de cours

1. Soit X une v.a.r. de fonction de répartition

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   Montrer que X est une v.a.r. à densité puis déterminer une densité de X.

2. On considère une v.a.r. à densité X, dont une densité est

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   Déterminer $X(\Omega)$ et la fonction de répartition de X.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \alpha \mathrm{e}^{2x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.
   Déterminer α pour que f soit une densité de probabilité.
4. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1[)$ et $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $Y = -\dfrac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$?
5. Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 2])$. On note $Y = -3X + 2$.
   Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y puis reconnaître la loi de Y.
6. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$. Vérifier que f est une densité de probabilité. Soit X une v.a.r. de densité f. La v.a.r. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

7. On considère une v.a.r. à densité X, dont une densité est

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La v.a.r. X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.