Colles de Mathématiques en E2A
Fonctions de deux variables, chaînes de Markov
Semaine 19 : 2 - 6 février

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre XV : Fonctions de deux variables

L'objet de ce chapitre est de fournir des outils pour trouver les extrema locaux d'une fonction de deux variables. Les résultats doivent être pensés comme des généralisations de ceux connus pour les fonctions d'une variable. La grosse différence entre les fonctions d'une variable et les fonctions de deux variables, c'est qu'on ne peut plus utiliser les concepts de croissance ou de décroissance pour les fonctions de deux variables. Adieu donc les tableaux de variations pour ces fonctions, qui nous permettaient de visualiser (et trouver) facilement les extrema.

1.1 Définitions

- Vocabulaire de topologie : distance euclidienne, boule ouverte, boule fermée, partie bornée, partie fermée, partie ouverte. Aucune preuve n'est exigible. L'énoncé doit donner la nature d'une partie de $\mathbb{R}^2$. Ce vocabulaire est uniquement introduit pour pouvoir formuler correctement les théorèmes du cours, mais aucune question ne doit porter dessus excepté une éventuelle représentation graphique d'un ouvert U très simple (cf exemples du cours).
- Graphe et lignes de niveaux d'une fonction de deux variables.
- Fonction de deux variables continue / de classe $\mathcal{C}^1$ / de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie D de $\mathbb{R}^2$.
- Dérivées partielles d'ordre 1 : $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$. Gradient de f. Notion de point critique. DL à l'ordre 1.
- Dérivée partielle d'ordre 2 : $\partial^2_{11}(f)$, $\partial^2_{21}(f)$, $\partial^2_{12}(f)$, $\partial^2_{22}(f)$. Matrice hessienne de f. Notion de point col / point selle.
- Maximum local/global, minimum local/global, extremum local/global.

1.2 Résultats

- Les fonctions polynomiales sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
- Stabilité de la classe C^0 (applications continues), C^1 ou C^2 par opérations algébriques et par composition.
- Formule de Taylor-Young à l'ordre 1.

- Condition nécessaire d'extremum local en un point (x_0, y_0) d'un ouvert.

  Analogue en 1D : si f est dérivable sur un intervalle I ouvert et si f admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0) = 0$.
- Théorème de Schwarz. Conséquence : la hessienne est une matrice symétrique donc diagonalisable.
- Condition suffisante d'extremum local en un point critique.

  Analogue en 1D : si f est C^2 sur un intervalle I ouvert, si $x_0 \in I$ est un point critique de f (*i.e.* $f'(x_0) = 0$) et si $f''(x_0) > 0$ (resp. $f''(x_0) < 0$), alors x_0 est un minimum (resp. maximum) local de f.
- Condition suffisante d'extremum global : si f est continue sur une partie D fermée et bornée du plan $\mathbb{R}^2$, alors f est bornée sur D et atteint ses bornes sur D.

  Analogue en 1D : si f est continue sur un segment $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes sur $[a, b]$.

1.3 Méthodes

- Il faut savoir déterminer les points critiques de f en raisonnant par équivalence.
- Si (a, b) est un point critique, il faut être capable de déterminer le signe des valeurs propres de la hessienne au point (a, b) (deux cas possibles : soit par calcul explicite, soit par calcul de la somme et du produit). Si une des valeurs propres est nulle, on se laisse guider par l'énoncé et on regarde un équivalent au voisinage du point critique de $f(x, y) - f(a, b)$ pour trouver une éventuelle alternance de signe.
- Pour montrer que f n'admet pas de maximum global ou de minimum global, on peut calculer certaines limites en l'infini.
- Il faut savoir reconnaître une aide de l'énoncé pour montrer qu'un extremum local est en fait global.
- Il faut être capable de conjecturer l'existence d'un extremum local à l'aide d'une représentation graphique (graphe ou lignes de niveaux).

2 Chapitre XVI : Chaînes de Markov

2.1 Définitions

- Notion de graphe probabiliste.
- Chaîne de Markov.
- Probabilités de transition (ou probabilités transitionnelles). Chaîne de Markov homogène.
- Le n^{e} état probabiliste de la chaîne de Markov est une **matrice ligne** donnant la loi de X_n. Etat initial.
- Matrice de transition associée à une chaîne de Markov. Graphe probabiliste associé à une matrice de transition.
- Etat stable (ou loi stationnaire).

2.2 Résultats

- Soit M une matrice de transition d'une chaîne de Markov. Alors les coefficients de la matrice M sont tous positifs ou nuls et la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

- Caractérisation des états stables d'une chaîne de Markov (où M est la matrice de transition)

$$\pi \text{ est un état stable de la chaîne de Markov} \iff \begin{cases} {}^t\pi \text{ est un vecteur propre de } {}^tM \text{ associé à la valeur propre } 1 \\ \pi \text{ définit une loi de probabilité} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} {}^t\pi \text{ est un vecteur propre de } {}^tM \text{ associé à la valeur propre } 1 \\ \forall j \in [\![1, r]\!],\ \pi_j \geqslant 0 \\ \sum_{j=1}^{r} \pi_j = 1 \end{cases}$$

- Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène à r états notés $1, 2, \ldots, r$. Si la suite (X_n) converge en loi, alors la loi limite est nécessairement une loi stationnaire de la chaîne de Markov. Autrement dit, si, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $\pi_j = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X_n = j])$ existe, alors le vecteur $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_r)$ est un état stable de la chaîne de Markov.

2.3 Méthodes

Il faut savoir redémontrer le théorème suivant, qui est une question classique des concours.

Théoreme 2.1. *Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène à r états notés $1, 2, \ldots, r$. On note $M = (p_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant r}}$ sa matrice de transition. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$V_n = V_0 M^n$$

La preuve se fait en deux étapes.

1. En utilisant la formule des probabilités totales, on montre la formule de récurrence : $V_{n+1} = V_n M$.
2. On démontre ensuite que $V_n = V_0 M^n$ par récurrence. Même si la récurrence est très simple, il faut la détailler si c'est le coeur de la question.

3 Questions de cours

1. Soit $f : (x, y) \mapsto xy - \mathrm{e}^x \ln(y)$ définie sur $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Démontrer avec précision que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
2. Soit $f : (x, y) \mapsto \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$ définie sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. On admet que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Montrer que f admet exactement un point critique et qu'il s'agit du point $(1, 1)$.
3. Déterminer puis étudier les points critiques de $f : (x, y) \mapsto xy$.
4. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$. On admet que f admet exactement deux points critiques : les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.
5. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Démontrer que f n'admet pas d'extremum global en calculant certaines limites.