

---

## DS6 (Maths I - version B)

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidat·es sont invité·es à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Dans ce problème, on s'intéresse à un modèle, inspiré du modèle de Cori, de propagation d'un virus au sein d'une population.

La partie 1 introduit des outils théoriques permettant de définir et d'étudier ce modèle.

Les parties 2 et 3 concernent cette étude. Si l'on fait abstraction des définitions, des notations et de la question 17, la partie 3 est indépendante des parties 1 et 2.

## Partie 1 - Lois composées

On considère :

- un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et  $J$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}^+$  ;
- une variable aléatoire  $Y$  sur cet espace à valeurs dans  $J$ .
- une famille  $(X_t)_{t \in J}$  de variables aléatoires sur cet espace **à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et indépendantes de  $Y$**  telles que pour tout  $t \in J$  :

$$X_t \text{ suit la loi } \mu(t)$$

$\mu(t)$  désignant une loi de probabilité de paramètre  $t$ .

On définit la variable aléatoire  $Z$  sur cet espace par :

$$\forall \omega \in \Omega, \text{ si } Y(\omega) = t \text{ alors } Z(\omega) = X_t(\omega)$$

et on dit que  $Z$  suit la loi  $\mu(Y)$ .

On considère dans cette partie une telle variable  $Z$  qui suit la loi  $\mu(Y)$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on définit aussi la fonction  $f_k$  de  $J$  dans  $[0, 1]$  par :

$$f_k(t) = \mathbb{P}([X_t = k])$$

1. *Un exemple avec **Python**.* On considère le script **Python** suivant :

```

1  def X(t) :
2      r = 1
3      while rd.random() > ... :
4          r = ...
5      return r
6
7  Y = rd.random()
8  Z = ...
9  print(Z)
```

En considérant les notations précédentes avec  $J = ]0, 1[$  et en notant  $Y$  la variable aléatoire dont  $Y$  est une simulation, compléter le script précédent pour que  $Z$  soit une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique  $\mathcal{G}(Y)$ .

- *Cas où  $Y$  est discrète.* On suppose dans les questions 2. et 3. que  $Y$  est discrète.

2. a) Soit  $y \in Y(\Omega)$ . Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{P}([Z = k] \cap [Y = y]) = f_k(y) \mathbb{P}([Y = y])$$

et si  $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$  :

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}([Z = k]) = f_k(y)$$

**b)** En déduire :

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{E}(f_k(Y)) \quad (1)$$

**c)** *Un exemple où  $J = \mathbb{N}^*$ . Soit  $p \in ]0, 1[$ . Si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et si la loi de  $Y$  est définie par, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :*

$$\mathbb{P}([Y = n]) = np^2(1-p)^{n-1}$$

montrer que  $Z$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$ .

**3.** On suppose que pour tout  $t \in J$ ,  $\mathbb{E}(X_t)$  existe. On note  $g(t)$  cette espérance et on suppose que  $\mathbb{E}(g(Y))$  existe.

**a)** Démontrer :

$$\mathbb{E}(g(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} k f_k(y) \mathbb{P}([Y = y]) \right)$$

**b)** En admettant que l'on peut inverser l'ordre des sommes, montrer que  $\mathbb{E}(Z)$  existe et :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(g(Y)) \quad (2)$$

• On admet que les résultats établis dans les questions 2. et 3., en particulier (1) et (2), sont encore vrais lorsque  $Y$  n'est plus discrète.

**4.** *Un premier exemple.* On suppose que  $J = ]0, 1[$ , que la loi de  $X_t$  est la loi géométrique de paramètre  $t$  et que  $Y$  suit la loi uniforme sur  $]0, 1[$ .

**a)** Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}([Z = k]) = \frac{1}{k(k+1)}$ . La variable aléatoire  $Z$  admet-elle une espérance ?

**b)** Que vaut  $\mathbb{E}(X_t)$  en fonction de  $t$  ? Si l'on note  $g$  cette fonction de  $t$ , que peut-on dire de  $\mathbb{E}(g(Y))$  ?

**5.** *Un deuxième exemple.* On suppose que  $J = [0, +\infty[$ , que la loi de  $X_t$  est la loi de Poisson de paramètre  $t$  et que  $Y$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

Par suite,  $Z$  suit la loi  $\mathcal{P}(Y)$ .

Par convention, la loi de Poisson de paramètre 0 est la loi de la variable aléatoire nulle.

**a)** Démontrer, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda e^{-(\lambda+1)t} dt = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx$$

**b)** En raisonnant par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$ , justifier que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx = 1$$

**c)** Déterminer la loi de  $Z$ . Reconnaître la loi de  $Z + 1$ .

**d)** En déduire  $\mathbb{E}(Z)$ . Ce résultat est-il cohérent avec l'égalité (2) ?

## Partie 2 - Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.

Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que :

- tout individu infecté par le virus est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que  $(d+1)$  jours, du jour  $n$  où il est infecté jusqu'au jour  $(n+d)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ;
- une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un  $(d+1)$ -uplet  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$  qui dépend généralement de facteurs biologiques.

Pour tout  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ , on dit que  $\alpha_k$  est la contagiosité de tout individu ayant été infecté  $k$  jours plus tôt.

Autrement dit, on peut considérer que  $\alpha_k$ , lié à la nature du virus, détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact  $k$  jours après sa contamination.

Finalement, les réels  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d$  sont tels que, pour tout  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ ,  $\alpha_k \in ]0, 1[$  et on note  $\alpha = \sum_{k=0}^d \alpha_k$ ,

ce qui signifie que  $\alpha$  est la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute la période où il est infecté.

On utilise les notations et définitions de la partie 1 avec  $J = \mathbb{R}^+$ .

On suppose que les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $R_n$  la variable aléatoire qui désigne le nombre moyen de contacts réalisés le jour  $n$  par un individu contagieux ce jour-là.

On suppose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'existence de  $\mathbb{E}(R_n)$  et on pose  $r_n = \mathbb{E}(R_n)$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $Z_n$  la variable aléatoire égale au nombre total d'individus qui sont infectés et donc deviennent contagieux le  $n$ -ième jour. Par exemple,  $Z_0 = 1$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $I_n$  la variable aléatoire égale à la contagiosité globale de la population le  $n$ -ième jour, définie par :

$$I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k} \quad (*)$$

- On suppose enfin que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n$  et  $R_n$  sont indépendantes et que si l'on pose  $Y_n = R_n I_n$ , on a :

$$Z_{n+1} \text{ suit la loi } \mathcal{P}(Y_n)$$

où  $\mathcal{P}$  désigne la loi de Poisson. Ainsi la loi de  $Z_{n+1}$  ne dépend que des lois de  $R_n$  et de  $I_n$ .

6. Donner une justification de (\*).

7. a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $\mathbb{E}(I_n)$  existe. Montrer que  $\mathbb{E}(Y_n)$  existe et en utilisant un résultat de la partie 1, montrer que  $\mathbb{E}(Z_{n+1})$  existe et vaut  $r_n \mathbb{E}(I_n)$ .

b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_n = \mathbb{E}(Z_n)$  existe et vérifie la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k} \quad (3)$$

8. Programmation de  $z_n$  avec **Python**.

On suppose que la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r_n = \frac{n+2}{n+1}$ .

On note  $\Delta$  la matrice ligne  $(\alpha_0 \ \dots \ \alpha_d)$ .

Écrire une fonction **Python** d'entête **def z(Delta,n)** : qui calcule  $z_n$  si **Delta** représente la matrice ligne  $\Delta$ . Si nécessaire, on pourra utiliser l'instruction **len(Delta)** qui donne le nombre d'éléments de **Delta**.

9. Soit  $(U_n)_{n \geq 0}$ ,  $(V_n)_{n \geq 0}$ , deux suites d'événements tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$ .  
Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = 1$ .

- On rappelle que l'on dit qu'un événement  $A$  est presque sûr lorsque  $\mathbb{P}(A) = 1$ .
- On **admet** que si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'événements, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$$

10. On note pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$  et  $B$  l'événement « la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours ».

a) Démontrer :  $\mathbb{P}(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$ .

- b) En distinguant les cas où  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$  est nulle ou pas, établir, pour tout  $p \geq d$  :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$$

puis :  $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$ .

- c) En déduire que  $B$  est presque sûr si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1$ .

- d) (CUBES UNIQUEMENT) Montrer que cela équivaut aussi au fait que  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers 0.

11. a) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbb{P}([Z_{n+1} = 0]) = \mathbb{E}(e^{-Y_n})$$

- b) On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$ . En déduire que  $B$  est presque sûr (on pourra montrer que pour tout  $x$  réel,  $e^{-x} \geq 1 - x$ ).

### Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Dans cette partie, on conserve les notations de la partie 2 et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par la relation (3) et  $z_0 = 1$ , sous trois hypothèses différentes concernant la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Pour tout réel  $x$ , on identifie  $x$  et la matrice carrée d'ordre 1 dont l'unique coefficient est  $x$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ , on pose  $a_k = \frac{\alpha_k}{\alpha}$ .

12. On suppose, dans cette question, qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $\rho \in ]0, 1[$  tels que, pour tout  $n \geq N$ ,  $r_n \alpha \leq \rho$ .  
On note  $(H_1)$  cette hypothèse.

a) Que vaut  $\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{k=0}^d a_k t^{d-k}$  ?

En déduire qu'il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que  $\theta^{d+1} \geq \rho \left( \sum_{k=0}^d a_k \theta^{d-k} \right)$  (on pourra raisonner par l'absurde).

- On pose  $M = \max_{k \in \llbracket N, N+d \rrbracket} \frac{z_k}{\theta^k}$ .

b) Démontrer, pour tout  $n \geq N$  :  $z_n \leq M \theta^n$ .

c) En déduire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$ .

On montrerait de même que s'il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $\rho > 1$  tels que, pour tout  $n \geq N$ ,  $r_n \alpha \geq \rho$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$ . On note  $(H_2)$  cette hypothèse.

- On suppose, dans les questions **13.** à **16.**, que la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante de valeur  $\frac{1}{\alpha}$ . On note  $(H_3)$  cette hypothèse.

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$

avec  $z_{-1} = \dots = z_{-d} = 0$ .

- 13. a)** Montrer qu'il existe une matrice  $A$  carrée d'ordre  $d+1$ , de première ligne  $L = (a_0 \ \dots \ a_d)$ , telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = A U_n$ .

**b)** En déduire que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $U_n = A^n U_0$  puis que  $z_{n+1} = L A^n U_0$ .

- 14.** Dans cette question,  $d = 2$  et  $L = (\frac{1}{6} \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{6})$ .

**a)** Démontrer :  $\text{Sp}(A) = \{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$ .

**b)** Déterminer une base  $(V_1, V_2, V_3)$  de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ , où  $V_1$  est un vecteur colonne propre de  $A$  pour la valeur propre 1,  $V_2$  pour  $-\frac{1}{2}$ ,  $V_3$  pour  $-\frac{1}{3}$ , ces colonnes ayant leur premier coefficient égal à 1.

**c)** Déterminer  $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ , tel que  $U_0 = s_1 V_1 + s_2 V_2 + s_3 V_3$ .

**d)** En déduire que la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $s_1$ .

- 15.** On revient au cas général.

**a)** Montrer que  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  si et seulement si  $\lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^d a_{d-k} \lambda^k$  et que les sous-espaces propres de  $A$  sont de dimension 1.

**b)** Montrer que 1 est valeur propre de  $A$  et déterminer le vecteur colonne propre associé  $V$  dont la somme des composantes vaut  $d+1$ .

**c)** Établir que  $-1 \notin \text{Sp}(A)$  et que si  $|\lambda| > 1$ , alors  $\lambda \notin \text{Sp}(A)$ .

- 16.** On pose pour tout  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ ,  $b_k = \sum_{i=k}^d a_i$ . On définit aussi le sous-espace vectoriel  $H$  de  $\mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$

formé des matrices  $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$  telles que  $\sum_{k=0}^d b_k w_k = 0$ .

**a)** Démontrer, pour tout  $W \in H$  :  $A W \in H$ .

**b)** Déterminer l'unique réel  $s$  tel que :  $U_0 - s V \in H$ .

**c)** Nous admettons que, pour tout  $W \in H$ ,  $L A^n W \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

En déduire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = s$ .

- 17.** Sous quelle(s) hypothèse(s), parmi les trois hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$  et  $(H_3)$  faites dans cette partie, la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$  est-elle convergente ? Comment interpréter ce résultat ?