

DS6 barème (Maths I - version B)

Dans ce problème, on s'intéresse à un modèle, inspiré du modèle de Cori, de propagation d'un virus au sein d'une population.

La **Partie 1** introduit des outils théoriques permettant de définir et d'étudier ce modèle.

Les **Parties 2** et **3** concernent cette étude. Si l'on fait abstraction des définitions, des notations et de la question 17, la **Partie 3** est indépendante des **Parties 1** et **2**.

Partie 1 - Lois composées

On considère :

- × un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et J un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}_+$;
- × une variable aléatoire Y sur cet espace à valeurs dans J .
- × une famille $(X_t)_{t \in J}$ de variables aléatoires sur cet espace **à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes de Y** telles que pour tout $t \in J$:

X_t suit la loi $\mu(t)$

$\mu(t)$ désignant une loi de probabilité de paramètre t .

On définit la variable aléatoire Z sur cet espace par :

$$\forall \omega \in \Omega, \text{ si } Y(\omega) = t \text{ alors } Z(\omega) = X_t(\omega)$$

et on dit que Z suit la loi $\mu(Y)$.

On considère dans cette partie une telle variable Z qui suit la loi $\mu(Y)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit aussi la fonction f_k de J dans $[0, 1]$ par :

$$f_k(t) = \mathbb{P}([X_t = k])$$

1. *Un exemple avec **Python**.* On considère le script **Python** suivant :

```
1 import numpy.random as rd
2 def X(t) :
3     r = 1
4     while rd.random() > ... :
5         r = ...
6     return r
7
8 Y = rd.random()
9 Z = ...
10 print(Z)
```

En considérant les notations précédentes avec $J =]0, 1[$ et en notant Y la variable aléatoire dont Y est une simulation, compléter le script précédent pour que Z soit une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(Y)$.

• 1 pt :

```
4 while rd.random() > t:
```

• 1 pt :

```
5     r = r + 1
```

- 1 pt :

$$\underline{g} \quad Z = X(Y)$$

- 1 pt : point de bonification si tout est juste

• Cas où Y est discrète. On suppose dans les questions 2. et 3. que Y est discrète.

2. a) Soit $y \in Y(\Omega)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([Z = k] \cap [Y = y]) = f_k(y) \mathbb{P}([Y = y])$$

et si $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$:

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}([Z = k]) = f_k(y)$$

- 1 pt : $\mathbb{P}([Z = k] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X_y = k] \cap [Y = y])$

- 1 pt : indépendance

- 1 pt : $\mathbb{P}_{[Y=y]}([Z = k]) = \frac{\mathbb{P}([Z = k] \cap [Y = y])}{\mathbb{P}([Y = y])}$

b) En déduire :

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{E}(f_k(Y)) \quad (1)$$

- 1 pt : La famille $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements

- 1 pt : FPT : $\mathbb{P}([Z = k]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [Z = k])$

- 1 pt : d'après le théorème de transfert : $\mathbb{E}(f_k(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} f_k(y) \mathbb{P}([Y = y])$

- 1 pt : la série converge absolument (SATP convergente)

c) Un exemple où $J = \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0, 1[$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et si la loi de Y est définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([Y = n]) = np^2(1-p)^{n-1}$$

montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre p .

- 1 pt : D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y = n]) \neq 0$. On peut donc considérer : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, la v.a.r. Y est une v.a.r. discrète

- 1 pt : $\mathbb{P}([Z = k]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) \mathbb{P}([Y = n])$

- 1 pt : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) \mathbb{P}([Y = n]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) \mathbb{P}([Y = n])$

- 1 pt : somme d'une série géométrique de raison $(1-p) \in]0, 1[$

- 1 pt : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z = k]) = p(1-p)^{k-1}$. On en conclut : $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

3. On suppose que pour tout $t \in J$, $\mathbb{E}(X_t)$ existe. On note $g(t)$ cette espérance et on suppose que $\mathbb{E}(g(Y))$ existe.

a) Démontrer :

$$\mathbb{E}(g(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k f_k(y) \mathbb{P}([Y = y]) \right)$$

- 1 pt : D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}(g(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} g(y) \mathbb{P}([Y = y])$

- **1 pt** : $\mathbb{E}(g(Y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}([X_y = k]) \right) \mathbb{P}([Y = y])$ car X_y est à valeurs dans $\mathbb{N}$

b) En admettant que l'on peut inverser l'ordre des sommes, montrer que $\mathbb{E}(Z)$ existe et :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(g(Y)) \quad (2)$$

- **1 pt** : $\mathbb{E}(g(Y)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}([Z = k])$
 - **1 pt** : la v.a.r. Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}([Z = k])$ est absolument convergente. Cela revient à démontrer la convergence car cette série est à termes positifs. Le point précédent démontre que cette série est convergente et que sa somme n'est autre que la quantité $\mathbb{E}(g(Y))$
 - On admet que les résultats établis dans les questions 2. et 3., en particulier (1) et (2), sont encore vrais lorsque Y n'est plus discrète.
4. *Un premier exemple.* On suppose que $J =]0, 1[$, que la loi de X_t est la loi géométrique de paramètre t et que Y suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

- a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Z = k]) = \frac{1}{k(k+1)}$.

La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

- **1 pt** : la fonction f_Y est nulle en dehors de $[0, 1]$
- **1 pt** : la fonction f_k est continue sur $]0, 1[$ en tant que fonction polynomiale
- **1 pt** : d'après le théorème de transfert, la v.a.r. $f_k(Y)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^1 f_k(t) f_Y(t) dt$ est absolument convergente. Cela revient à démontrer la convergence car l'intégrande est positive
- **1 pt** : On procède alors par intégrations par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = (1-t)^{k-1} & v(t) = -\frac{(1-t)^k}{k} \end{array} \right.$$

- **1 pt** : Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le SEGMENT $[0, 1]$
 - **1 pt** : La v.a.r. Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 1} k \mathbb{P}([Z = k])$ est absolument convergente. Cela revient à démontrer la convergence car cette série est à termes positifs.
 - **1 pt** : La v.a.r. Z n'admet pas d'espérance
- b) Que vaut $\mathbb{E}(X_t)$ en fonction de t ? Si l'on note g cette fonction de t , que peut-on dire de $\mathbb{E}(g(Y))$?
- **1 pt** : $\mathbb{E}(X_t) = \frac{1}{t}$
 - **1 pt** : Supposons que l'espérance de $g(Y)$ existe. D'après la question 3.b) (encore valable lorsque Y n'est plus discrète), on en déduit que Z admet une espérance. Or, on a montré que Z n'admet pas d'espérance à la question précédente. C'est absurde, donc $\mathbb{E}(g(Y))$ n'existe pas.

5. *Un deuxième exemple.* On suppose que $J = [0, +\infty[$, que la loi de X_t est la loi de Poisson de paramètre t et que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Par suite, Z suit la loi $\mathcal{P}(Y)$.

Par convention, la loi de Poisson de paramètre 0 est la loi de la variable aléatoire nulle.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda e^{-(\lambda+1)t} dt = \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx$$

- 1 pt : la fonction f_Y est nulle en dehors de $[0, +\infty[$
- 1 pt : la fonction f_k est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur cet intervalle
- 1 pt : par thm de transfert, la v.a.r. $f_k(Y)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_k(t) f_Y(t) dt$ est absolument convergente. Cela revient à démontrer la convergence car l'intégrande est positive
- 3 pts : convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda e^{-(\lambda+1)t} dt$ (petit o, continuité, critère de Riemann)
- 1 pt : changement de variable $x = (\lambda + 1)t$.
- 1 pt : ce changement de variable est valide car $\psi : x \mapsto \frac{1}{\lambda + 1}x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ (ou dire directement qu'il est affine)

b) En raisonnant par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx = 1$$

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité

c) Déterminer la loi de Z . Reconnaître la loi de $Z + 1$.

- 1 pt : $\mathbb{P}([Z = k]) = \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^{k+1}} = \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)^k$
- 1 pt : $(Z + 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- 1 pt : $Z + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)$

d) En déduire $\mathbb{E}(Z)$. Ce résultat est-il cohérent avec l'égalité (2) ?

- 1 pt : Z admet une espérance en tant que transformée affine de la v.a.r. $Z + 1$ qui admet elle-même une espérance
- 1 pt : $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{\lambda}$
- 1 pt : D'après l'énoncé, $X_t \hookrightarrow \mathcal{P}(t)$. On en déduit que X_t admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X_t) = t$$

Ainsi, $g : t \mapsto t$ et $g(Y) = Y$. Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors Y admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda}$$

on retrouve bien le résultat (2)

Partie 2 - Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- × tout individu infecté par le virus est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que $(d+1)$ jours, du jour n où il est infecté jusqu'au jour $(n+d)$ ($n \in \mathbb{N}$) ;
- × une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un $(d+1)$ -uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$ qui dépend généralement de facteurs biologiques.

Pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, on dit que α_k est la contagiosité de tout individu ayant été infecté k jours plus tôt. Autrement dit, on peut considérer que α_k , lié à la nature du virus, détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact k jours après sa contamination.

Finalement, les réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont tels que, pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $\alpha_k \in]0, 1[$ et on note $\alpha = \sum_{k=0}^d \alpha_k$,

ce qui signifie que α est la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute la période où il est infecté.

On utilise les notations et définitions de la **Partie 1** avec $J = \mathbb{R}_+$.

On suppose que les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la variable aléatoire qui désigne le nombre moyen de contacts réalisés le jour n par un individu contagieux ce jour-là.

On suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $\mathbb{E}(R_n)$ et on pose $r_n = \mathbb{E}(R_n)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre total d'individus qui sont infectés et donc deviennent contagieux le n -ième jour. Par exemple, $Z_0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la variable aléatoire égale à la contagiosité globale de la population le n -ième jour, définie par :

$$I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k} \quad (*)$$

- On suppose enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et R_n sont indépendantes et que si l'on pose $Y_n = R_n I_n$, on a :

$$Z_{n+1} \text{ suit la loi } \mathcal{P}(Y_n)$$

où $\mathcal{P}$ désigne la loi de Poisson. Ainsi la loi de Z_{n+1} ne dépend que des lois de R_n et de I_n .

6. Donner une justification de (*).

- **1 pt : définissons la contagiosité globale de la population le $n^{\text{ème}}$ jour comme la somme des contagiosités de tous les individus de la population encore contagieux ce jour-là**
Parmi les individus contagieux le jour n , il faut distinguer :

- **1 pt : cas où $n \geq d$**

- × **ceux nouvellement infectés le jour n et ont donc pour coefficient de contagiosité α_0 .**

La contagiosité de cette catégorie de la population est la somme de toutes les contagiosités des individus qui composent cette population. Cette catégorie comportant Z_n individus, tous de contagiosité α_0 , la contagiosité globale de cette catégorie est alors :

$$\alpha_0 \times Z_n$$

- × **ceux nouvellement infectés le jour $n-1$ et ont donc pour coefficient de contagiosité α_1 .**

Cette catégorie comportant Z_{n-1} individus, tous de contagiosité α_1 , la contagiosité globale de cette catégorie est alors :

$$\alpha_1 \times Z_{n-1}$$

× ...

- × ceux nouvellement infectés le jour $n - d$ (sous l'hypothèse : $n - d \geq 0$) et ont donc pour coefficient de contagiosité α_{n-d} .

Cette catégorie comportant Z_{n-d} individus, tous de contagiosité α_d , la contagiosité globale de cette catégorie est alors :

$$\alpha_d \times Z_{n-d}$$

Les individus infectés un jour qui précède le jour $n - d$ ne sont plus contagieux et n'entrent donc pas dans la mesure de contagiosité.

- 1 pt : cas où $n < d$

7. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{E}(I_n)$ existe. Montrer que $\mathbb{E}(Y_n)$ existe et en utilisant un résultat de la **Partie 1**, montrer que $\mathbb{E}(Z_{n+1})$ existe et vaut $r_n \mathbb{E}(I_n)$.

- 1 pt : la v.a.r. $Y_n = R_n I_n$ admet une espérance comme produit de v.a.r. indépendantes qui admettent chacune une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(R_n I_n) = \mathbb{E}(R_n) \times \mathbb{E}(I_n) = r_n \times \mathbb{E}(I_n)$$

- 1 pt : $X_t \hookrightarrow \mathcal{P}(t)$ donc $\mathbb{E}(X_t) = t$ donc $g : t \mapsto t$
- 1 pt : $g(Y_n) = Y_n$ admet une espérance donc il en est de même de Z_{n+1} (cf 3.b))
- 1 pt : $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \mathbb{E}(g(Y_n)) = \mathbb{E}(Y_n) = r_n \mathbb{E}(I_n)$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \mathbb{E}(Z_n)$ existe et vérifie la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k} \quad (3)$$

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité forte
- 1 pt : linéarité de l'espérance

8. Programmation de z_n avec **Python**.

On suppose que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \frac{n+2}{n+1}$.

On note Δ la matrice ligne $(\alpha_0 \ \cdots \ \alpha_d)$.

Écrire une fonction **Python** d'entête `def z(Delta,n)` : qui calcule z_n si `Delta` représente la matrice ligne Δ . Si nécessaire, on pourra utiliser l'instruction `len(Delta)` qui donne le nombre d'éléments de `Delta`.

```

1  def z(Delta,n) :
2      Z = np.zeros(n+1)
3      Z[0] = 1
4      d = len(Delta)-1
5      for j in range(n) :
6          S = 0
7          m = min(j,d)
8          for k in range(m+1) :
9              S = S + Delta[k]*Z[j-k]
10         Z[j+1] = ((j+2)/(j+1)) * S
11     return Z[n]
```

- 1 pt : initialisation de Z
- 1 pt : d = len(Delta)-1
- 2 pts : calcul de la somme

```

5      for j in range(n) :
6          S = 0
7          m = min(j,d)
8          for k in range(m+1) :
9              S = S + Delta[k]*Z[j-k]

```

- 2 pts : fin de la fonction

```

10         Z[j+1] = ((j+2)/(j+1)) * S
11     return Z[n]

```

9. Soient $(U_n)_{n \geq 0}$, $(V_n)_{n \geq 0}$, deux suites d'événements tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$.
Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = 1$.

- 1 pt : D'après la formule du crible :

$$\mathbb{P}(U_n \cap V_n) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(V_n) - \mathbb{P}(U_n \cup V_n)$$

- 1 pt : $\mathbb{P}(U_n) \leq \mathbb{P}(U_n \cup V_n) \leq \mathbb{P}(\Omega)$
- 1 pt : par thm d'encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n \cup V_n) = 1$

- On rappelle que l'on dit qu'un événement A est presque sûr lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.
- On admet que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$$

10. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$ et B l'événement « la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours ».

- a) Démontrer : $\mathbb{P}(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

- 1 pt : $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$
- 1 pt : thm de la limite monotone
- 1 pt : la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'événements

- b) En distinguant les cas où $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$ est nulle ou pas, établir, pour tout $p \geq d$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$$

puis : $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$.

- 1 pt : cas $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right) = 0$

- **2 pts : cas** $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right) \neq 0$

- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$

c) En déduire que B est presque sûr si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1$.

- **1 pt : montrons que** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right) = 1 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1$

- **2 pts : ($\Rightarrow$) (1 point pour citer la croissance de $\mathbb{P}$)**

- **2 pts : ($\Leftarrow$) (1 point pour citer la question 9)**

d) Montrer que cela équivaut aussi au fait que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers 0.

- **1 pt : ($\Rightarrow$) On suppose :**

$$\forall j \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([Z_n = j]) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

En particulier, pour $j = 0$, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1$.

- **2 pts : ($\Leftarrow$) On suppose :** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1$.

On a, pour tout $j \geq 1$, $0 \leq \mathbb{P}([Z_n = j]) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z_n = i]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

11. a) Montrer, en utilisant un résultat de la **Partie 1**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([Z_{n+1} = 0]) = \mathbb{E}(e^{-Y_n})$$

- **1 pt : d'après la propriété (1),** $\mathbb{P}([Z_{n+1} = 0]) = \mathbb{E}(f_0(Y_n))$

- **1 pt : par définition :**

$$f_0 : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \mathbb{P}([X_t = 0]) = e^{-t} \frac{t^0}{0!} = e^{-t}$$

b) On suppose : $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$. En déduire que B est presque sûr (on pourra montrer que pour tout x réel, $e^{-x} \geq 1 - x$).

- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \geq 1 - x$

- **1 pt :** $\mathbb{E}(e^{-Y_n}) \geq \mathbb{E}(1 - Y_n)$ **par croissance de l'espérance**

- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y_n) = z_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ **cf question 7.a)**

- **1 pt : thm d'encadrement**

Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Dans cette partie, on conserve les notations de la **Partie 2** et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la relation (3) et $z_0 = 1$, sous trois hypothèses différentes concernant la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout réel x , on identifie x et la matrice carrée d'ordre 1 dont l'unique coefficient est x .

Pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, on pose $a_k = \frac{\alpha_k}{\alpha}$.

12. On suppose, dans cette question, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho \in]0, 1[$ tels que, pour tout $n \geq N$, $r_n \alpha \leq \rho$. On note (H_1) cette hypothèse.

a) Que vaut $\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{k=0}^d a_k t^{d-k}$?

En déduire qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\theta^{d+1} \geq \rho \left(\sum_{k=0}^d a_k \theta^{d-k} \right)$ (on pourra raisonner par l'absurde).

• 1 pt : La fonction $t \mapsto \sum_{k=0}^d a_k t^{d-k}$ est donc une fonction polynomiale. On en déduit qu'elle est continue en 1

• 1 pt : $\sum_{k=0}^d a_k t^{d-k} \xrightarrow{t \rightarrow 1} \sum_{k=0}^d a_k 1^{d-k} = \sum_{k=0}^d a_k = 1$

• 1 pt : raisonnement par l'absurde

• On pose $M = \max_{k \in \llbracket N, N+d \rrbracket} \frac{z_k}{\theta^k}$.

b) Démontrer, pour tout $n \geq N$: $z_n \leq M \theta^n$.

• 1 pt : Si $n \in \llbracket N, N+d \rrbracket$, alors, par définition du maximum :

$$\frac{z_n}{\theta^n} \leq \max_{k \in \llbracket N, N+d \rrbracket} \left(\frac{z_k}{\theta^k} \right) = M$$

Comme $\theta^n \geq 0$, on obtient bien : $z_n \leq M \theta^n$.

• 3 pts : initialisation

• 3 pts : hérédité forte

c) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$.

• 1 pt : $z_n \geq 0$

• 1 pt : $\theta \in]0, 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta^n = 0$

• 1 pt : thm d'encadrement

On montrerait de même que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho > 1$ tels que, pour tout $n \geq N$, $r_n \alpha \geq \rho$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$. On note (H_2) cette hypothèse.

- On suppose, dans les questions 13. à 16. , que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante de valeur $\frac{1}{\alpha}$. On note (H_3) cette hypothèse.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$

avec $z_{-1} = \dots = z_{-d} = 0$.

13. a) Montrer qu'il existe une matrice A carrée d'ordre $d+1$, de première ligne $L = (a_0 \ \dots \ a_d)$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A U_n$.

- 1 pt :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{d-2} & a_{d-1} & a_d \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1 pt : vérification dans le cas $n < d$

- 1 pt : vérification dans le cas $n \geq d$

b) En déduire que, pour tout $n \geq 0$, $U_n = A^n U_0$ puis que $z_{n+1} = L A^n U_0$.

- 1 pt : initialisation

- 1 pt : hérédité

- 1 pt : $(z_{n+1}) = (a_0 z_n + \cdots + a_d z_{n-d}) = L \times U_n = L \times A^n U_0$

14. Dans cette question, $d = 2$ et $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a) Démontrer : $\text{Sp}(A) = \{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$.

- 1 pt : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $\text{rg}(A - I_3) = 2 < 3$. D'où : $1 \in \text{Sp } A$

- 1 pt : $\text{rg}(A + \frac{1}{2} I_3) < 3$. D'où : $-\frac{1}{2} \in \text{Sp } A$

- 1 pt : $\text{rg}(A + \frac{1}{3} I_3) < 3$. D'où : $-\frac{1}{3} \in \text{Sp } A$

- 1 pt : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle admet donc au plus 3 valeurs propres distinctes

b) Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où V_1 est un vecteur colonne propre de A pour la valeur propre 1, V_2 pour $-\frac{1}{2}$, V_3 pour $-\frac{1}{3}$, ces colonnes ayant leur premier coefficient égal à 1.

- 1 pt : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

- 1 pt : La famille (V_1, V_2, V_3) ainsi définie est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

c) Déterminer $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$, tel que $U_0 = s_1 V_1 + s_2 V_2 + s_3 V_3$.

- 1 pt : $U_0 = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_{-1} \\ z_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\bullet \text{ 1 pt : } U_0 = s_1 V_1 + s_2 V_2 + s_3 V_3 \iff \begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 = 1 \\ s_1 - 2s_2 - 3s_3 = 0 \\ s_1 + 4s_2 + 9s_3 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ 1 pt : } U_0 = \frac{1}{2} \cdot V_1 + V_2 - \frac{1}{2} \cdot V_3$$

d) En déduire que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers s_1 .

$$\bullet \text{ 1 pt : } U_n = A^n U_0 = A^n \left(\frac{1}{2} V_1 + V_2 - \frac{1}{2} V_3 \right) = \frac{1}{2} A^n V_1 + A^n V_2 - \frac{1}{2} A^n V_3$$

$$\bullet \text{ 1 pt : } U_n = \frac{1}{2} V_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n V_2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n V_3$$

$$\bullet \text{ 1 pt : } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right) \in]-1, 1[^2$$

15. On revient au cas général.

a) Montrer que $\lambda \in \text{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^d a_{d-k} \lambda^k$ et que les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

• 2 pts :

$$\text{rg}(A - \lambda I_{d+1}) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda^{d+1} + \lambda^d a_0 + \lambda^{d-1} a_1 + \cdots + \lambda a_{d-1} + a_d \end{pmatrix} \right)$$

$$\bullet \text{ 2 pts : } E_\lambda(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \lambda^d \\ \lambda^{d-1} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\bullet \text{ 1 pt : La famille } \mathcal{F}_\lambda = \left(\begin{pmatrix} \lambda^d \\ \lambda^{d-1} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_\lambda(A)$$

b) Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le vecteur colonne propre associé V dont la somme des composantes vaut $d+1$.

$$\bullet \text{ 1 pt : } \sum_{k=0}^d a_{d-k} = 1 \text{ donc 1 est valeur propre de } A$$

$$\bullet \text{ 1 pt : } V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ on obtient bien que la somme des composantes de ce vecteur vaut } d+1 \text{ et } V \in E_1(A)$$

c) Établir que $-1 \notin \text{Sp}(A)$ et que si $|\lambda| > 1$, alors $\lambda \notin \text{Sp}(A)$.

- **1 pt** : si $\sum_{k=0}^d a_{d-k} (-1)^k = (-1)^{d+1}$, alors $\left| \sum_{k=0}^d a_{d-k} (-1)^k \right| = 1$, c'est un cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire
- **1 pt** : les $a_{d-k} (-1)^k$ sont de signes alternés, il ne peut pas y avoir cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire
- **2 pts** : $\left| \sum_{k=0}^d a_{d-k} \lambda^k \right| \leq \sum_{k=0}^d |a_{d-k} \lambda^k| = \sum_{k=0}^d a_{d-k} |\lambda|^k \leq \sum_{k=0}^d a_{d-k} |\lambda|^d = |\lambda|^d < |\lambda|^{d+1}$

16. On pose pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $b_k = \sum_{i=k}^d a_i$. On définit aussi le sous-espace vectoriel H de $\mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$

formé des matrices $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$ telles que $\sum_{k=0}^d b_k w_k = 0$.

a) Démontrer, pour tout $W \in H$: $AW \in H$.

- **1 pt** : $b_0 \sum_{k=0}^d a_k w_k + \sum_{k=1}^d b_k w_{k-1} = \sum_{k=0}^{d-1} (a_k + b_{k+1}) w_k + a_d w_d$
- **1 pt** : $a_k + b_{k+1} = a_k + \sum_{i=k+1}^d a_i = \sum_{i=k}^d a_i = b_k$
- **1 pt** : $b_0 \sum_{k=0}^d a_k w_k + \sum_{k=1}^d b_k w_{k-1} = 0$

b) Déterminer l'unique réel s tel que : $U_0 - sV \in H$.

- **1 pt** : $U_0 - sV = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s \\ -s \\ \vdots \\ -s \end{pmatrix}$
- **1 pt** : $U_0 - sV \in H \iff s = \frac{1}{\sum_{k=0}^d b_k}$

c) Nous admettons que, pour tout $W \in H$, $LA^n W \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = s$.

- **1 pt** : $z_{n+1} = LA^n U_0 = LA^n (U_0 - sV + sV) = LA^n (U_0 - sV) + sLA^n V$
- **1 pt** : **Par récurrence immédiate** : $\forall n \in \mathbb{N}, LA^n V = V$

- **1 pt** : $LV = (a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_{d-1} \ a_d) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^d a_k = 1$

17. Sous quelle(s) hypothèse(s), parmi les trois hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) faites dans cette partie, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ est-elle convergente ? Comment interpréter ce résultat ?

- **2 pts** : **Par critère de comparaison des séries à termes positifs**, sous l'hypothèse (H_1) , la série $\sum_{n \geq 0} z_n$ est convergente

-
- 1 pt : sous l'hypothèse (H_2) , la série $\sum_{n \geq 0} z_n$ est grossièrement divergente
 - 1 pt : sous l'hypothèse (H_3) , la série $\sum_{n \geq 0} z_n$ est grossièrement divergente
 - 1 pt : sur les trois hypothèses étudiées, la contamination s'éteint en un nombre fini de jours seulement sous l'hypothèse (H_1)