
Planche HEC : convergence en loi

Exercice sans préparation 1

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On suppose dans cette question :

- $\forall n \in \mathbb{N}, X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n admet une espérance et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$.

La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?

2. On suppose maintenant :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n admet une espérance et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$.

La suite de variables aléatoires (X_n) converge-t-elle en loi ?

3. On suppose dans cette question :

- $\forall n \in \mathbb{N}, X_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n admet une espérance et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$.

La suite de variables aléatoires (X_n) converge-t-elle en loi ?

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

1. La famille $([X_n = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = 1$$

D'où :

$$\mathbb{P}(X_n = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = 1$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \mathbb{P}(X_n = k) \leq k\mathbb{P}(X_n = k)$. Ainsi, en sommant cette inégalité pour k variant de 1 à $+\infty$ (possible car toutes les séries convergent) :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{E}(X_n)$$

Par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = 0$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1$$

De plus, puisque pour tout $j \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \mathbb{P}(X_n = j) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$ le théorème d'encadrement donne aussi :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = 0$$

On peut conclure que la suite (X_n) converge en loi vers la variable aléatoire constante égale à 0.

Commentaire

Un exemple de telle suite est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n(\Omega) = \{0, n\}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2}.$$

puisque $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n}$.

2. Montrons que tout peut arriver avec deux exemples.

- Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Prenons la suite (X_n) constante égale à Z .

On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = 0$. De plus, la suite étant constante, elle converge en loi vers Z .

- Considérons la suite (X_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n(\Omega) = \{-n, n\}, \quad \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et donc on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$. Montrons que la suite (X_n) ne converge pas en loi. Supposons le contraire et notons X une variable aléatoire telle que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$.

Remarquons que pour tout réel x fixé, lorsque n est très grand : $-n \in]-\infty, x]$ et $n \notin]-\infty, x]$. D'où :

$$[X_n \leq x] = [X_n = -n]$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = -n]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, en tout point x de continuité de F_X , on a :

$$F_X(x) = \frac{1}{2}$$

Ceci contredit le fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ (*).

Commentaire

La contradiction (*) repose sur le fait que l'on pourra trouver des points de continuité de F_X dans n'importe quel voisinage de $+\infty$.

On démontre cela en utilisant le fait que F_X est croissante et bornée entre 0 et 1, elle a alors un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité. L'ensemble $\mathbb{R}$ étant indénombrable (ainsi que tous ses intervalles non réduits à un point), la très grande majorité des points de $\mathbb{R}$ sont des points de continuité de F_X .

Cet argument dépasse le cadre du programme d'ECG. Il faudra donc admettre ce point de la preuve et se contenter d'une intuition.

3. Dans cette question, nous sommes dans le cadre d'application de l'inégalité de Markov.

Soit $a > 0$. D'après l'inégalité de Markov :

$$0 \leq \mathbb{P}(X_n > a) \leq \mathbb{P}(X_n \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n)}{a}$$

D'après le théorème d'encadrement (et par passage à l'événement contraire), on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \leq a) = 1$$

De plus, pour tout $x < 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

Notons W la variable aléatoire constante égale à 0. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et 0 est l'unique point de discontinuité de F_W .

Ainsi, d'après ce qui précède, pour tout point x de continuité de F_W (c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}^*$) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_W(x)$$

On peut conclure que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} W$.