

Sujets de révisions

Applications de la réduction des matrices

I. Calcul de la puissance n^e d'une matrice

Exercice 1 (*Calcul d'une puissance via le binôme de Newton*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n .

Exercice 2 (*Calcul d'une puissance via le binôme de Newton*)

Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$. Soient $M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$.

1. Déterminer des réels x et y tels que $M = xN + yI_4$.
2. Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle renvoie la matrice M :

```

1 def matriceM(a,b):
2     return _____ * np.ones([4,4]) - _____ * np.eye(4)

```

3. Calculer N^2 . Conjecturer une formule pour N^k et la démontrer par récurrence.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = (a - b)^n I_4 + \frac{(a + 3b)^n - (a - b)^n}{4b} N$$

Exercice 3 (*Calcul d'une puissance via un polynôme annulateur et une division euclidienne*)

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $P(X) = X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de U .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q_n et deux réels α_n et β_n tels que

$$X^n = (X^2 - 2X - 3)Q_n(X) + \alpha_n X + \beta_n$$

3. En déduire l'expression de U^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 (*Calcul d'une puissance via la diagonalisation*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. La matrice A est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de A .
3. Calculer A^2 . En déduire un polynôme annulateur de A .
4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .
5. (a) Exhiber $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

(b) Que représente la matrice P ? Déterminer P^{-1} .

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer A^n .

Exercice 5 (*Calcul d'une puissance via la diagonalisation*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\text{Sp}(A) = \{1, 3\}$.
2. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A .
3. Exhiber $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

4. Calculer P^{-1} .
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 - 3^n & 3^n - 1 \\ 1 - 3^n & 1 & 3^n - 1 \\ 1 - 3^n & 1 - 3^n & 2 \times 3^n - 1 \end{pmatrix}$$

II. Etudes de suites récurrentes linéaires

Exercice 6 (Deux suites couplées)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer les valeurs propres de A .
- (b) Déterminer les sous-espaces propres de A .
- En déduire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
- Exprimer, pour tout entier naturel n , A^n sous forme de tableau matriciel.
- Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par : $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= -4u_n + v_n \end{cases}$$

(a) On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n .

(b) En déduire l'expression, pour tout entier naturel n , de u_n et v_n en fonction de n .

Exercice 7 (Une suite récurrente linéaire d'ordre 3)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Pour tout entier naturel n , on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on donne : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

- Reconnaître pour tout entier naturel n , le produit MX_n . En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M , X_0 et de l'entier naturel n .
- (a) Déterminer les valeurs propres de M et leur sous-espace propre associé.
- (b) La matrice M est-elle diagonalisable ?
- On note f l'endomorphisme canoniquement associé à M , c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 .
- (a) On pose $e'_1 = (1, -2, 4)$, $e'_2 = (1, 1, 1)$ et $e'_3 = (0, 1, 2)$.
Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 et que la matrice T de f dans \mathcal{B}' est :

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de T^n .
- Soit P la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' . Exprimer M en fonction de T , P et P^{-1} , puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n .
- (a) Calculer P^{-1} .
- (b) Pour tout entier naturel n , calculer les coefficients de la première ligne de M^n . En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de l'entier naturel n .

ESSEC I 2021 - suite récurrente linéaire d'ordre $d + 1$

Partie 2 - Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- tout individu infecté par le virus est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que $(d + 1)$ jours, du jour n où il est infecté jusqu'au jour $(n + d)$ ($n \in \mathbb{N}$) ;
- une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un $(d + 1)$ -uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$ qui dépend généralement de facteurs biologiques.

Pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, on dit que α_k est la contagiosité de tout individu ayant été infecté k jours plus tôt.

Autrement dit, on peut considérer que α_k , lié à la nature du virus, détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact k jours après sa contamination.

Finalement, les réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont tels que, pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $\alpha_k \in]0, 1[$ et on note $\alpha = \sum_{k=0}^d \alpha_k$, ce qui signifie que α est la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute la période où il est infecté.

On utilise les notations et définitions de la partie 1 avec $J = \mathbb{R}^+$.

On suppose que les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la variable aléatoire qui désigne le nombre moyen de contacts réalisés le jour n par un individu contagieux ce jour-là.

On suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $\mathbb{E}(R_n)$ et on pose $r_n = \mathbb{E}(R_n)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre total d'individus qui sont infectés et donc deviennent contagieux le n -ième jour. Par exemple, $Z_0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la variable aléatoire égale à la contagiosité globale de la population le n -ième jour, définie par :

$$I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k} \quad (*)$$

- On suppose enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et R_n sont indépendantes et que si l'on pose $Y_n = R_n I_n$, on a :

$$Z_{n+1} \text{ suit la loi } \mathcal{P}(Y_n)$$

où \mathcal{P} désigne la loi de Poisson. Ainsi la loi de Z_{n+1} ne dépend que des lois de R_n et de I_n .

6. Donner une justification de (*).

7. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{E}(I_n)$ existe. Montrer que $\mathbb{E}(Y_n)$ existe et en utilisant un résultat de la partie 1, montrer que $\mathbb{E}(Z_{n+1})$ existe et vaut $r_n \mathbb{E}(I_n)$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \mathbb{E}(Z_n)$ existe et vérifie la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k} \quad (3)$$

8. *Programmation de z_n avec Python.*

On suppose que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \frac{n+2}{n+1}$.

On note Δ la matrice ligne $(\alpha_0 \dots \alpha_d)$.

Écrire une fonction **Python** d'entête `def z(Delta, n)` : qui calcule z_n si `Delta` représente la matrice ligne Δ . Si nécessaire, on pourra utiliser l'instruction `len(Delta)` qui donne le nombre d'éléments de `Delta`.

9. Soit $(U_n)_{n \geq 0}$, $(V_n)_{n \geq 0}$, deux suites d'événements tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = 1$.

• On rappelle que l'on dit qu'un événement A est presque sûr lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.

10. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$ et B l'événement « la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours ».

a) Démontrer : $\mathbb{P}(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

b) En distinguant les cas où $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$ est nulle ou pas, établir, pour tout $p \geq d$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$$

$$\text{puis : } \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right).$$

c) En déduire que B est presque sûr si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1$.

d) Montrer que cela équivaut aussi au fait que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers 0.

11. a) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([Z_{n+1} = 0]) = \mathbb{E}(e^{-Y_n})$$

b) On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$. En déduire que B est presque sûr (on pourra montrer que pour tout x réel, $e^{-x} \geq 1 - x$).

Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Dans cette partie, on conserve les notations de la partie 2 et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la relation (3) et $z_0 = 1$, sous trois hypothèses différentes concernant la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout réel x , on identifie x et la matrice carrée d'ordre 1 dont l'unique coefficient est x .

Pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, on pose $a_k = \frac{\alpha_k}{\alpha}$.

12. On suppose, dans cette question, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho \in]0, 1[$ tels que, pour tout $n \geq N$, $r_n \alpha \leq \rho$.

On note (H_1) cette hypothèse.

a) Que vaut $\lim_{t \rightarrow 1} \sum_{k=0}^d a_k t^{d-k}$?

En déduire qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\theta^{d+1} \geq \rho \left(\sum_{k=0}^d a_k \theta^{d-k} \right)$ (on pourra raisonner par l'absurde).

• On pose $M = \max_{k \in \llbracket N, N+d \rrbracket} \frac{z_k}{\theta^k}$.

b) Démontrer, pour tout $n \geq N$: $z_n \leq M \theta^n$.

c) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$.

On montrerait de même que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho > 1$ tels que, pour tout $n \geq N$, $r_n \alpha \geq \rho$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$. On note (H_2) cette hypothèse.

- On suppose, dans les questions **13.** à **16.**, que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante de valeur $\frac{1}{\alpha}$. On note (H_3) cette hypothèse.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$

avec $z_{-1} = \dots = z_{-d} = 0$.

- 13. a)** Montrer qu'il existe une matrice A carrée d'ordre $d+1$, de première ligne $L = (a_0 \dots a_d)$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A U_n$.
- b)** En déduire que, pour tout $n \geq 0$, $U_n = A^n U_0$ puis que $z_{n+1} = L A^n U_0$.
- 14.** Dans cette question, $d = 2$ et $L = \left(\frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6}\right)$.
- a)** Démontrer : $\text{Sp}(A) = \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$.
- b)** Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où V_1 est un vecteur colonne propre de A pour la valeur propre 1, V_2 pour $-\frac{1}{2}$, V_3 pour $-\frac{1}{3}$, ces colonnes ayant leur premier coefficient égal à 1.
- c)** Déterminer $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$, tel que $U_0 = s_1 V_1 + s_2 V_2 + s_3 V_3$.
- d)** En déduire que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers s_1 .

15. On revient au cas général.

- a)** Montrer que $\lambda \in \text{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda^{d+1} = \sum_{k=0}^d a_{d-k} \lambda^k$ et que les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.
- b)** Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le vecteur colonne propre associé V dont la somme des composantes vaut $d+1$.
- c)** Établir que $-1 \notin \text{Sp}(A)$ et que si $|\lambda| > 1$, alors $\lambda \notin \text{Sp}(A)$.

16. On pose pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $b_k = \sum_{i=k}^d a_i$. On définit aussi le sous-espace vectoriel H de $\mathcal{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$

formé des matrices $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$ telles que $\sum_{k=0}^d b_k w_k = 0$.

- a)** Démontrer, pour tout $W \in H$: $A W \in H$.
- b)** Déterminer l'unique réel s tel que : $U_0 - s V \in H$.
- c)** Nous admettons que, pour tout $W \in H$, $L A^n W \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.
En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = s$.

17. Sous quelle(s) hypothèse(s), parmi les trois hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) faites dans cette partie, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ est-elle convergente? Comment interpréter ce résultat?

III. Etudes de systèmes différentiels linéaires

Exercice 8 On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et le système différentiel linéaire

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = 2y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = 3z(t) \end{cases}$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ de sorte que

$$X \text{ est solution de } (S) \iff X' = TX$$

On suppose que X est solution de (S) .

1. Montrer qu'il existe une constante $C_3 \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = C_3 e^{3t}$.
2. Montrer qu'il existe une constante $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = C_2 e^{2t} - 2C_3 e^{3t}$.
3. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression de $x(t)$ similaire aux expressions précédentes, faisant intervenir une nouvelle constante $C_1 \in \mathbb{R}$.
4. Expliciter trois vecteurs colonnes U_1, U_2, U_3 tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = C_1 U_1 e^t + C_2 U_2 e^{2t} + C_3 U_3 e^{3t}$$

5. Que peut-on dire des trois vecteurs U_1, U_2, U_3 vis-à-vis de la matrice T ? Quel résultat retrouve-t-on?

Exercice 9 (DS 5)

Partie I : Etude d'une matrice A

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. a) On exécute le code **Python** suivant :

```

1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as al
3 A = np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
4 print(al.matrix_power(A,3))
```

et on obtient l'affichage :

1		[[2 -2 2]
2		[1 1 2]
3		[-2 0 -3]]

Traduire ce résultat par une égalité entre deux matrices.

- b) En déduire les valeurs propres possibles de A .
2. a) Déterminer $\text{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A .
 - b) Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $(2 \ 3 \ -2)$, et une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$. On explicitera les matrices P et D .

Partie III : Etude d'un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -2x(t) - 3z(t) \end{cases}$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$(S) \iff X' = AX$$

où A est la matrice étudiée dans la partie I.

8. Déterminer l'ensemble des états d'équilibre du système différentiel linéaire (S) .

9. Soient X et Y deux solutions de (S) . On suppose qu'il existe un instant $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $X(t_0) = Y(t_0)$. Que peut-on en déduire sur X et Y ?

10. Justifier que l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\{t \mapsto \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1 \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\text{où } U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11. On considère dans cette question deux problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}_2) : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- a) *i)* Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy (\mathcal{P}_1) , que l'on notera X_1 .
ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente. Expliciter le point limite (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) . Quelle propriété possède ce point limite vis-à-vis du système différentiel linéaire (S) ?
- b) *i)* Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy (\mathcal{P}_2) , que l'on notera X_2 .
ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.
- c) On a représenté page suivante les tracés de 4 solutions du système différentiel linéaire (S) . Dire quels sont les tracés associés aux solutions X_1 et X_2 étudiées ci-dessus. On justifiera les réponses.

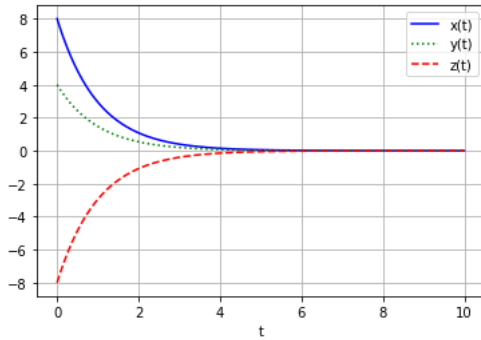


FIG. 1 Tracé 1

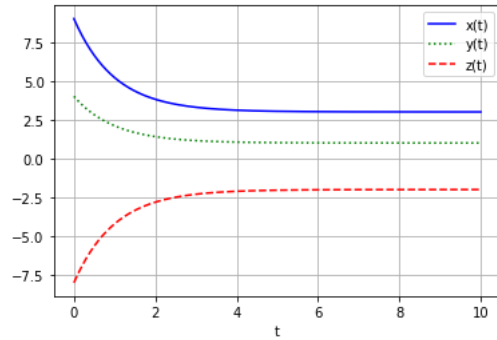


FIG. 2 Tracé 2

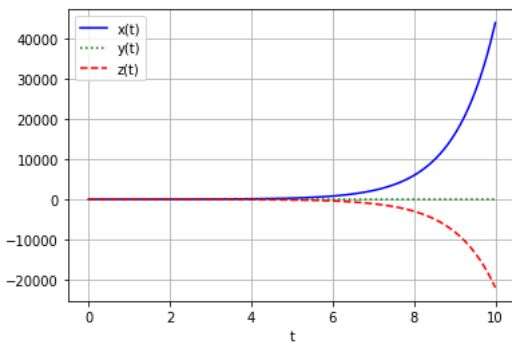


FIG. 3 Tracé 3

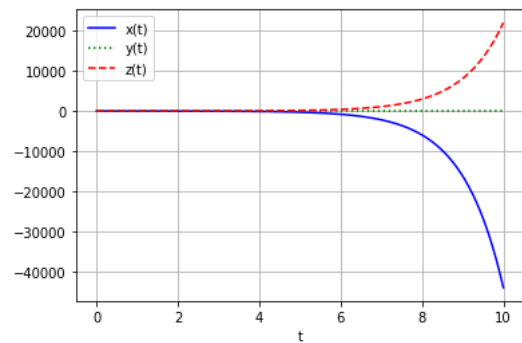


FIG. 4 Tracé 4

Exercice 10 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1} . On pose $T = P^{-1}AP$. Vérifier que $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- Expliciter $\text{Sp}(T)$. En déduire $\text{Sp}(A)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

On considère maintenant les systèmes différentiels linéaires suivants :

$$(S_A) : \begin{cases} x'_1 = 3x_1 - x_2 + x_3 \\ x'_2 = x_1 + 2x_2 \\ x'_3 = x_2 + x_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_T) : \begin{cases} y'_1 = 2y_1 + y_2 \\ y'_2 = 2y_2 + y_3 \\ y'_3 = 2y_3 \end{cases}$$

où les inconnues x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$.

- Soit $Y = P^{-1}X$. On note alors, pour tout réel t , $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

Montrer que X est solution de (S_A) si et seulement si Y est solution de (S_T) .

- a) Donner les fonctions φ dérivables sur \mathbb{R} vérifiant l'équation différentielle (\mathcal{E}_1) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) \quad (\mathcal{E}_1)$$

- b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto ate^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle (\mathcal{E}_2) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ae^{2t} \quad (\mathcal{E}_2)$$

c) Soit $b \in \mathbb{R}$. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (\mathcal{E}_3) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + bte^{2t} \quad (\mathcal{E}_3)$$

On pourra chercher cette solution sous la forme $f : t \mapsto t(\alpha t + \beta)e^{2t}$.

5. On fixe Y une solution de (S_T).

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_3(t) = y_3(0)e^{2t}$.

b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_2(t) = y_2(0)e^{2t} + y_3(0)te^{2t}$.

c) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression de $y_1(t)$ similaire aux expressions précédentes.

6. On fixe X une solution de (S_A).

a) Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) &= (\lambda_2 + \lambda_3 t)e^{2t} \\ x_2(t) &= ((\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_2 t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2) e^{2t} \\ x_3(t) &= ((\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_3)t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2) e^{2t} \end{cases}$$

b) Montrer que si la trajectoire associée à X est convergente, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Interpréter.

IV. Etudes de chaînes de Markov

EML 2022 sujet 0

Etude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan A, B et C . Le but de l'exercice est d'étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n : il ne dépend donc pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

- A_n l'événement « le pion se trouve en A à l'étape n » et $p_n = \mathbb{P}(A_n)$,
- B_n l'événement « le pion se trouve en B à l'étape n » et $q_n = \mathbb{P}(B_n)$,
- C_n l'événement « le pion se trouve en C à l'étape n » et $r_n = \mathbb{P}(C_n)$,
- $V_n = (p_n \quad q_n \quad r_n)$ le n^{e} état de cette chaîne de Markov.

Partie I - Modélisation

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et expliquer pourquoi la matrice de transition est :

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

2. (a) Déterminer p_0, q_0, r_0 , ainsi que p_1, q_1, r_1 .
- (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation : $V_{n+1} = V_n M$.
- (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $V_n = V_0 M^n$.

Partie II - Calcul des puissances de la matrice M et application

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Justifier que la matrice A est diagonalisable.
 - Calculer $A^2 - 5A$. Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?
 - Déterminer une matrice inversible P ainsi qu'une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. On calculera la matrice P^{-1} .
 - Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. La chaîne de Markov associée au graphe probabiliste de la question 1 a-t-elle un état stable ? Lequel ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
- Démontrer que : $M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$, où M est la matrice introduite à la question 1.
 - Démontrer que $p_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{4^n} \right)$ et déterminer alors une expression de q_n et r_n .
6. Déterminer les limites respectives des suites (p_n) , (q_n) et (r_n) . Interpréter ces résultats.

Partie III - Nombre moyen de passages en A et temps d'attente avant le premier passage en B

7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

- Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Quelle est la signification de l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$?
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n .
 - En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre moyen de passage en A entre l'étape 1 et l'étape n .
8. On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante : T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B , et dans le cas où le pion ne passe jamais en B , on pose $T_B = 0$.

Le but de cette question est de déterminer la loi de la variable aléatoire T_B ainsi que son espérance.

- Calculer $\mathbb{P}([T_B = 1])$ et $\mathbb{P}([T_B = 2])$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $\overline{B_n}$ à l'aide des événements A_n et C_n .
- Démontrer que $\mathbb{P}(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \frac{1}{4} \mathbb{P}(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})$. En déduire que $\mathbb{P}_{\overline{B_2} \cap \overline{B_1}}(B_3) = \frac{1}{4}$.

Dans la suite de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'événement $\bigcap_{k=1}^n \overline{B_k}$ et on admettra

$$\text{que : } \mathbb{P}_{D_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}.$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([T_B = k])$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}([T_B = 0])$.
- Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?

AgroParisTech 2021 - chaîne de Markov à $2N + 1$ états

Partie I : modèle d'évolution de Wright-Fisher

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On se donne une variable aléatoire X_0 à valeurs dans $\llbracket 0, 2N \rrbracket$ et on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 0, 2N \rrbracket$ vérifiant, pour tout entier n ,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, 2N \rrbracket^2, \mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j]) = \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j}$$

Pour un variant génétique biallélique (dont les allèles sont notés A et a) et dans le cadre du modèle de Wright-Fisher, X_n représente le nombre d'allèles de type A à la génération n dans une population finie de taille N .

Etude d'un cas particulier

On suppose ici que $N = 1$ et on note, pour tout entier n , $V_n = (\mathbb{P}([X_n = 0]) \quad \mathbb{P}([X_n = 1]) \quad \mathbb{P}([X_n = 2]))$.

1. Déterminer une matrice M telle que pour tout entier n , on ait $V_{n+1} = V_n M$.
2. Prouver que M est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $M = PDP^{-1}$.
3. Calculer M^n pour tout entier n .
4. En déduire que :
 - a) pour tout entier n , on a $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$.
 - b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n \in \{0, 2\}]) = 1$

Cas général

On suppose désormais que $N \geq 1$. On cherche à généraliser les résultats de la question 4.

5. a) Soit $i \in \llbracket 0, 2N \rrbracket$. Donner une interprétation probabiliste de la somme

$$S_i = \sum_{j=0}^{2N} j \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j}$$

et en déduire sa valeur.

- b) En déduire que pour tout entier n , on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)$.
- c) Interpréter le résultat obtenu.
6. On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = \mathbb{P}([X_n \in \{0, 2\}])$.
 - a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 1, 2N - 1 \rrbracket$. Montrer que

$$\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} \in \{0, 2\}]) \geq 2 \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$$

- b) En déduire que, pour tout entier n , on a $u_{n+1} \geq u_n + 2(1 - u_n) \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$.
- c) Soit $\alpha \in]0, 1[$. On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_n + \alpha(1 - w_n)$$

Justifier que la suite (w_n) est convergente et donner sa limite.

- d) Conclure et interpréter le résultat obtenu.

ECRICOME 2024

Partie I

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

On note I_n la matrice identité d'ordre n .

1. Étude du cas $n = 3$.

Dans cette question, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Justifier que la matrice M est diagonalisable.
- Calculer $(M + I)^2$, puis en déduire un polynôme annulateur de M .
- Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de M .

Dans les questions qui suivent, on considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que P est inversible et que :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans les questions qui suivent, on pose $D = P^{-1}MP$.

- Déterminer les coefficients de la matrice D .
- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel k , $M^k = PD^kP^{-1}$.
- Soit k un entier naturel. On admet qu'il existe deux réels a_k et b_k tels que $M^k = a_kM + b_kI_3$.
En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer a_k et b_k .

2. Cas général : n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.

On considère la matrice J_n carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $(J_n)^k = n^{k-1}J_n$.
- Exprimer M_n en fonction de I_n et J_n .
- En déduire, pour tout entier naturel k non nul :

$$(M_n)^k = c_k J_n + (-1)^k I_n,$$

où :

$$c_k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i}.$$

d) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n},$$

où c_k est le réel défini à la question précédente.

e) En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_n)^k$, en fonction de n et de k .

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un graphe non orienté K_n à n sommets numérotés de 1 à n , dans lequel chaque sommet est relié à chaque autre sommet par une arête et n'est pas relié à lui-même par une arête.

3. Représenter graphiquement les graphes K_2 , K_3 , K_4 et K_5 .

4. a) Déterminer la matrice d'adjacence du graphe K_n .

b) Dans le graphe K_4 , combien existe-t-il de chaînes (ou chemins) de longueur 4 menant du sommet numéro 1 à lui-même.

On pourra utiliser le résultat de la question 2.e).

5. Déterminer le degré de chaque sommet du graphe K_n .

6. Montrer que le nombre total d'arêtes du graphe K_n est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.

Partie III

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et K_n le graphe défini dans la partie II. On parcourt les sommets du graphe K_n de la façon suivante :

- Initialement, à l'étape $k = 0$, on se trouve sur le sommet numéro 1.
- A chaque étape, on change de sommet en suivant au hasard, avec équiprobabilité, l'une des arêtes issues du sommet actuel.

Pour tout entier naturel k , on note X_k la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel on se trouve à la k^e étape (c'est-à-dire à l'issue du k^e déplacement). En particulier, X_0 est une variable aléatoire constante égale à 1.

Pour tout entier naturel k , on note V_k la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ définie par :

$$V_k = (\mathbb{P}([X_k = 1]) \quad \mathbb{P}([X_k = 2]) \quad \dots \quad \mathbb{P}([X_k = n])).$$

7. Déterminer V_0 et V_1 .

8. Déterminer la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

9. a) Rappeler la définition d'un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

b) Soit V la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{n}$: $V = \left(\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n} \right)$.

Montrer que V est un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

10. a) Pour tout entier naturel k , rappeler sans démonstration une expression de V_{k+1} en fonction de V_k , M_n et n , où M_n est la matrice introduite par (1) en introduction de la partie I.

b) En déduire, pour tout entier naturel k :

$$V_k = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 (M_n)^k.$$

c) En utilisant le résultat de la question 2.e), en déduire que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on reconnaîtra la loi.

11. Comparer et commenter les résultats des questions 9.b) et 10.c).