Corrigés des sujets de révisions
Applications de la réduction des matrices

I. Calcul de la puissance n^{e} d'une matrice

Exercice 1 *(Calcul d'une puissance via le binôme de Newton)*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n.

Exercice 2 *(Calcul d'une puissance via le binôme de Newton)*

Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$. Soient $M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$.

1. Déterminer des réels x et y tels que $M = xN + yI_4$.
2. Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle renvoie la matrice M :

```
def matriceM(a,b):
    return _____ * np.ones([4,4]) - _______ * np.eye(4)
```

3. Calculer N^2. Conjecturer une formule pour N^k et la démontrer par récurrence.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = (a-b)^n I_4 + \frac{(a+3b)^n - (a-b)^n}{4b} N$$

Exercice 3 *(Calcul d'une puissance via un polynôme annulateur et une division euclidienne)*

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $P(X) = X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de U.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q_n et deux réels α_n et β_n tels que

$$X^n = (X^2 - 2X - 3)Q_n(X) + \alpha_n X + \beta_n$$

3. En déduire l'expression de U^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 *(Calcul d'une puissance via la diagonalisation)*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. La matrice A est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de A.
3. Calculer A^2. En déduire un polynôme annulateur de A.
4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
5. (a) Exhiber $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :
$$A = PDP^{-1}$$
   (b) Que représente la matrice P ? Déterminer P^{-1}.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer A^n.

Exercice 5 *(Calcul d'une puissance via la diagonalisation)*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}$.
2. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A.
3. Exhiber $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :
$$A = PDP^{-1}$$
4. Calculer P^{-1}.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes que
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1-3^n & 3^n-1 \\ 1-3^n & 1 & 3^n-1 \\ 1-3^n & 1-3^n & 2\times 3^n - 1 \end{pmatrix}$$

II. Etudes de suites récurrentes linéaires

Exercice 6 *(Deux suites couplées)*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer les valeurs propres de A.
   (b) Déterminer les sous-espaces propres de A.
2. En déduire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Exprimer, pour tout entier naturel n, A^n sous forme de tableau matriciel.
4. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par : $u_0 = 1$, $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= -4u_n + v_n \end{cases}$$

   (a) On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n.
   (b) En déduire l'expression, pour tout entier naturel n, de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 7 *(Une suite récurrente linéaire d'ordre* 3*)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on donne : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Reconnaître pour tout entier naturel n, le produit MX_n. En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.
2. (a) Déterminer les valeurs propres de M et leur sous-espace propre associé.
   (b) La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) On pose $e_1' = (1, -2, 4)$, $e_2' = (1, 1, 1)$ et $e_3' = (0, 1, 2)$.
   Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice T de f dans $\mathcal{B}'$ est :

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de T^n.
4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Exprimer M en fonction de T, P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.
5. (a) Calculer P^{-1}.
   (b) Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la première ligne de M^n. En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de l'entier naturel n.

ESSEC I 2021 - suite récurrente linéaire d'ordre $d+1$

Partie 2 - Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.
Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

- tout individu infecté par le virus est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que $(d+1)$ jours, du jour n où il est infecté jusqu'au jour $(n+d)$ $(n \in \mathbb{N})$;
- une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un $(d+1)$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ qui dépend généralement de facteurs biologiques.

Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on dit que α_k est la contagiosité de tout individu ayant éte infecté k jours plus tôt.
Autrement dit, on peut considérer que α_k, lié à la nature du virus, détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact k jours après sa contamination.
Finalement, les réels α_0, α_1, …, α_d sont tels que, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $\alpha_k \in]0, 1[$ et on note $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{d} \alpha_k$, ce qui signifie que α est la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute la période où il est infecté.
On utilise les notations et définitions de la partie 1 avec $J = \mathbb{R}^+$.
On suppose que les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la variable aléatoire qui désigne le nombre moyen de contacts réalisés le jour n par un individu contagieux ce jour-là.
  On suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $\mathbb{E}(R_n)$ et on pose $r_n = \mathbb{E}(R_n)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre total d'individus qui sont infectés et donc deviennent contagieux le n-ième jour. Par exemple, $Z_0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la variable aléatoire égale à la contagiosité globale de la population le n-ième jour, définie par :
$$I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k Z_{n-k} \qquad (*)$$
- On suppose enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et R_n sont indépendantes et que si l'on pose $Y_n = R_n I_n$, on a :
$$Z_{n+1} \text{ suit la loi } \mathcal{P}(Y_n)$$
  où $\mathcal{P}$ désigne la loi de Poisson. Ainsi la loi de Z_{n+1} ne dépend que des lois de R_n et de I_n.

6. Donner une justification de $(*)$.

7. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{E}(I_n)$ existe. Montrer que $\mathbb{E}(Y_n)$ existe et en utilisant un résultat de la partie 1, montrer que $\mathbb{E}(Z_{n+1})$ existe et vaut $r_n \, \mathbb{E}(I_n)$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \mathbb{E}(Z_n)$ existe et vérifie la relation de récurrence :
$$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k z_{n-k} \qquad (3)$$

8. *Programmation de z_n avec* ***Python****.*
On suppose que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.
On note Δ la matrice ligne $(\alpha_0 \cdots\cdots \alpha_d)$.
Écrire une fonction **Python** d'entête `def z(Delta,n) :` qui calcule z_n si `Delta` représente la matrice ligne Δ. Si nécessaire, on pourra utiliser l'instruction `len(Delta)` qui donne le nombre d'éléments de `Delta`.

9. Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$, $(V_n)_{n\geqslant 0}$, deux suites d'événements tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = 1$.

- On rappelle que l'on dit qu'un événement A est presque sûr lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.

10. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$ et B l'événement « la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours ».

a) Démontrer : $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

b) En distinguant les cas où $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$ est nulle ou pas, établir, pour tout $p \geqslant d$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$$

puis : $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$.

c) En déduire que B est presque sûr si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\,[Z_n = 0]\,) = 1$.

d) Montrer que cela équivaut aussi au fait que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers 0.

11. ***a)*** Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\,[Z_{n+1} = 0]\,) \;=\; \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-Y_n}\right)$$

b) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$. En déduire que B est presque sûr (on pourra montrer que pour tout x reel, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$).

Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Dans cette partie, on conserve les notations de la partie 2 et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definie par la relation (3) et $z_0 = 1$, sous trois hypothèses différentes concernant la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour tout réel x, on identifie x et la matrice carrée d'ordre 1 dont l'unique coefficient est x.
Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on pose $a_k = \dfrac{\alpha_k}{\alpha}$.

12. On suppose, dans cette question, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho \in \,]0, 1[$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n\,\alpha \leqslant \rho$.
On note (H_1) cette hypothese.

a) Que vaut $\lim\limits_{t\to 1} \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\, t^{d-k}$?

En déduire qu'il existe $\theta \in \,]0, 1[$ tel que $\theta^{d+1} \geqslant \rho \left(\sum\limits_{k=0}^{d} a_k\, \theta^{d-k}\right)$ (on pourra raisonner par l'absurde).

- On pose $M = \max\limits_{k\in[\![N,N+d]\!]} \dfrac{z_k}{\theta^k}$.

b) Démontrer, pour tout $n \geqslant N$: $z_n \leqslant M\,\theta^n$.

c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

On montrerait de même que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho > 1$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n\,\alpha \geqslant \rho$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = +\infty$. On note (H_2) cette hypothèse.

- On suppose, dans les questions ***13.*** à ***16.*** , que **la suite** $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est constante de valeur** $\dfrac{1}{\alpha}$. On note (H_3) cette hypothèse.
  On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$

avec $z_{-1} = \ldots = z_{-d} = 0$.

13. ***a)*** Montrer qu'il existe une matrice A carrée d'ordre $d+1$, de première ligne $L = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots\cdots & a_d \end{pmatrix}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A\,U_n$.

b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = A^n\,U_0$ puis que $z_{n+1} = L\,A^n\,U_0$.

14. Dans cette question, $d = 2$ et $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a) Démontrer : $\mathrm{Sp}(A) = \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$.

b) Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où V_1 est un vecteur colonne propre de A pour la valeur propre 1, V_2 pour $-\frac{1}{2}$, V_3 pour $-\frac{1}{3}$, ces colonnes ayant leur premier coefficient égal a 1.

c) Déterminer $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$, tel que $U_0 = s_1\,V_1 + s_2\,V_2 + s_3\,V_3$.

d) En déduire que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s_1.

15. On revient au cas général.

a) Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda^{d+1} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_{d-k}\,\lambda^k$ et que les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

b) Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le vecteur colonne propre associé V dont la somme des composantes vaut $d+1$.

c) Établir que $-1 \notin \mathrm{Sp}(A)$ et que si $|\lambda| > 1$, alors $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$.

16. On pose pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $b_k = \sum\limits_{i=k}^{d} a_i$. On définit aussi le sous-espace vectoriel H de $\mathscr{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$ formé des matrices $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$ telles que $\sum\limits_{k=0}^{d} b_k\,w_k = 0$.

a) Démontrer, pour tout $W \in H$: $A\,W \in H$.

b) Déterminer l'unique réel s tel que : $U_0 - s\,V \in H$.

c) Nous admettons que, pour tout $W \in H$, $L\,A^n\,W \to 0$ quand $n \to +\infty$.
En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = s$.

17. Sous quelle(s) hypothèse(s), parmi les trois hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) faites dans cette partie, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$ est-elle convergente ? Comment interpréter ce résultat ?

III. Etudes de systèmes différentiels linéaires

Exercice 8 On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et le système différentiel linéaire

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & x(t) & + & y(t) & - & z(t) \\ y'(t) & = & & & 2y(t) & - & 2z(t) \\ z'(t) & = & & & & & 3z(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ de sorte que

$$X \text{ est solution de } (S) \iff X' = TX$$

On suppose que X est solution de (S).

1. Montrer qu'il existe une constante $C_3 \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = C_3 \mathrm{e}^{3t}$.

2. Montrer qu'il existe une constante $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = C_2 \mathrm{e}^{2t} - 2C_3 \mathrm{e}^{3t}$.

3. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression de $x(t)$ similaire aux expressions précédentes, faisant intervenir une nouvelle constante $C_1 \in \mathbb{R}$.

4. Expliciter trois vecteurs colonnes U_1, U_2, U_3 tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = C_1 U_1 \mathrm{e}^{t} + C_2 U_2 \mathrm{e}^{2t} + C_3 U_3 \mathrm{e}^{3t}$$

5. Que peut-on dire des trois vecteurs U_1, U_2, U_3 vis-à-vis de la matrice T ? Quel résultat retrouve-t-on ?

Exercice 9 `(DS 5 2022-2023)` On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. a) On compile le code **Python** suivant :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
print(al.matrix_power(A,3))
```

et on obtient l'affichage :

```
[[ 2 -2  2]
 [ 1  1  2]
 [-2  0 -3]]
```

Traduire ce résultat par une égalité entre deux matrices.

b) En déduire les valeurs propres possibles de A.

2. a) Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A.

b) Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$. On explicitera les matrices P et D.

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & - & 2y(t) & + & 2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & y(t) & + & 2z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) & & & - & 3z(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

8. Montrer que X est solution de (S) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$, où A est la matrice étudiée dans la partie I.

9. Déterminer l'ensemble des états d'équilibre du système différentiel linéaire (S).

10. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soient X et Y deux solutions de (S). On suppose que $X(t_0) = Y(t_0)$. Que peut-on en déduire sur X et Y ?

11. Montrer que les solutions de (S) sont de la forme

$$X(t) = \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^t U_1, \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

où $U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

12. On considère dans cette question deux problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{P}_2) : \begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

a) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$, que l'on notera X_1.

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente. Expliciter le point limite (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3). Quelle propriété possède ce point limite vis-à-vis du système différentiel linéaire (S) ?

b) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$, que l'on notera X_2.

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

c) On a représenté page suivante les tracés de 4 solutions du système différentiel linéaire (S). Dire quels sont les tracés associés aux solutions X_1 et X_2 étudiées ci-dessus. On justifiera les réponses.

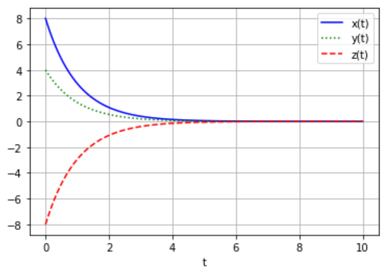


Fig. 1 Tracé 1

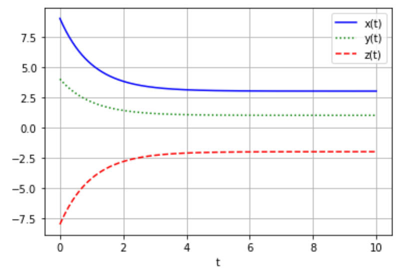


Fig. 2 Tracé 2

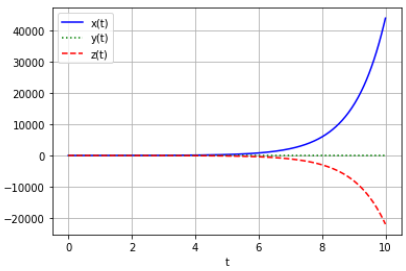


Fig. 3 Tracé 3

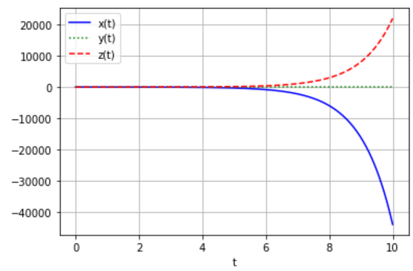


Fig. 4 Tracé 4

Exercice 10 (DS 6 2022-2023) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1}. On pose $T = P^{-1}AP$. Vérifier que $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Expliciter $\mathrm{Sp}(T)$. En déduire $\mathrm{Sp}(A)$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

On considère maintenant les systèmes différentiels linéaires suivants :

$$(S_A) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & 3x_1(t) & - & x_2(t) & + & x_3(t) \\ x_2'(t) & = & x_1(t) & + & 2x_2(t) & & \\ x_3'(t) & = & & & x_2(t) & + & x_3(t) \end{array} \right. \quad \text{et } (S_T) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1'(t) & = & 2y_1(t) & + & y_2(t) & & \\ y_2'(t) & = & & & 2y_2(t) & + & y_3(t) \\ y_3'(t) & = & & & & & 2y_3(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$.

3. Montrer que X est solution de (S_A) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$.

4. Soit $Y = P^{-1}X$. On note alors, pour tout réel t, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

Montrer que X est solution de (S_A) si et seulement si Y est solution de (S_T).

5. ***a)*** Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) \qquad (\mathscr{E}_1)$$

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto at\mathrm{e}^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + a\mathrm{e}^{2t} \qquad (\mathscr{E}_2)$$

c) Soit $b \in \mathbb{R}$. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_3)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 2\varphi(t) + bt\mathrm{e}^{2t} \qquad (\mathscr{E}_3)$$

On pourra utiliser la méthode de variation de la constante.

6. On fixe Y une solution de (S_T).

a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_3(t) = y_3(0)\mathrm{e}^{2t}$.

b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y_2(t) = y_2(0)\mathrm{e}^{2t} + y_3(0)t\mathrm{e}^{2t}$.

c) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, une expression de $y_1(t)$ similaire aux expressions précédentes.

7. On fixe X une solution de (S_A).

a) Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) & = (\lambda_2 + \lambda_3 t)\mathrm{e}^{2t} \\ x_2(t) & = \left((\lambda_1 + \lambda_3) + \lambda_2 t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2\right)\mathrm{e}^{2t} \\ x_3(t) & = \left((\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_3)t + \frac{1}{2}\lambda_3 t^2\right)\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

b) Montrer que si la trajectoire associée à X est convergente, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Interpréter.

IV. Etudes de chaînes de Markov

EML 2022 sujet 0

Etude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan A, B et C. Le but de l'exercice est d'étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

— le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n : il ne dépend donc pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.

— pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

— A_n l'événement « le pion se trouve en A à l'étape n » et $p_n = \mathbb{P}(A_n)$,

— B_n l'événement « le pion se trouve en B à l'étape n » et $q_n = \mathbb{P}(B_n)$,

— C_n l'événement « le pion se trouve en C à l'étape n » et $r_n = \mathbb{P}(C_n)$,

— $V_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$ le n^{e} état de cette chaîne de Markov.

Partie I - Modélisation

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et expliquer pourquoi la matrice de transition est :
$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

2. (a) Déterminer p_0, q_0, r_0, ainsi que p_1, q_1, r_1.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation : $V_{n+1} = V_n M$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $V_n = V_0 M^n$.

Partie II - Calcul des puissances de la matrice M et application

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Calculer $A^2 - 5A$. Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?
   (c) Déterminer une matrice inversible P ainsi qu'une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. On calculera la matrice P^{-1}.
   (d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. La chaîne de Markov associée au graphe probabiliste de la question 1 a-t-elle un état stable ? Lequel ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que : $M^n = \dfrac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$, où M est la matrice introduite à la question 1.
   (b) Démontrer que $p_n = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{2}{4^n}\right)$ et déterminer alors une expression de q_n et r_n.
6. Déterminer les limites respectives des suites (p_n), (q_n) et (r_n). Interpréter ces résultats.

Partie III - Nombre moyen de passages en A et temps d'attente avant le premier passage en B

7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

   (a) Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \ldots X_n$. Quelle est la signification de l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$?

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n.

   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre moyen de passage en A entre l'étape 1 et l'étape n.

8. On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante : T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B, et dans le cas où le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$.

   Le but de cette question est de déterminer la loi de la variable aléatoire T_B ainsi que son espérance.

   (a) Calculer $\mathbb{P}([T_B = 1])$ et $\mathbb{P}([T_B = 2])$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $\overline{B_n}$ à l'aide des événements A_n et C_n.

   (c) Démontrer que $\mathbb{P}(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \dfrac{1}{4}\mathbb{P}(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})$. En déduire que $\mathbb{P}_{\overline{B_2} \cap \overline{B_1}}(B_3) = \dfrac{1}{4}$.

   Dans la suite de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'événement $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}$ et on admettra que : $\mathbb{P}_{D_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.

   (d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([T_B = k])$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}([T_B = 0])$.

   (e) Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?

AgroParisTech 2021 - chaîne de Markov à $2N+1$ états

Partie I : modèle d'évolution de Wright-Fisher

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On se donne une variable aléatoire X_0 à valeurs dans $[\![0, 2N]\!]$ et on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $[\![0, 2N]\!]$ vérifiant, pour tout entier n,

$$\forall (i,j) \in [\![0, 2N]\!]^2,\ \mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j]) = \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j}$$

Pour un variant génétique biallélique (dont les allèles sont notés A et a) et dans le cadre du modèle de Wright-Fisher, X_n représente le nombre d'allèles de type A à la génération n dans une population finie de taille N.

Etude d'un cas particulier

On suppose ici que $N = 1$ et on note, pour tout entier n, $V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 0]) & \mathbb{P}([X_n = 1]) & \mathbb{P}([X_n = 2]) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice M telle que pour tout entier n, on ait $V_{n+1} = V_n M$.

Démonstration. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

2. Prouver que M est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $M = PDP^{-1}$.

Démonstration. On trouve que :

- $\mathrm{Sp}(M) = \{\frac{1}{2}, 1\}$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_1(M)$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_{\frac{1}{2}}(M)$.
- La matrice M est donc diagonalisable et $M = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

□

3. Calculer M^n pour tout entier n.

Démonstration. On commence par calculer $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\boxed{M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

4. En déduire que :

a) pour tout entier n, on a $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$.

Démonstration. Commencer par démontrer par récurrence (immédiate) que, pour tout entier n, on a $V_n = V_0 M^n$. Ainsi, on a accès à la loi de X_n en fonction de celle de X_0. On utilise ensuite la formule de l'espérance pour une variable aléatoire discrète finie à valeurs dans $[\![0,2]\!]$. ☐

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n \in \{0,2\}]) = 1$

Démonstration. On note $V_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$.

$$\mathbb{P}([X_n = 1]) = [V_0 M^n]_2 = \frac{\beta}{2^n}$$

On passe au complémentaire et on obtient :

$$\mathbb{P}([X_n \in \{0,2\}]) = 1 - \frac{\beta}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

☐

Cas général

On suppose désormais que $N \geqslant 1$. On cherche à généraliser les résultats de la question *4*.

5. ***a)*** Soit $i \in [\![0,2N]\!]$. Donner une interprétation probabiliste de la somme

$$S_i = \sum_{j=0}^{2N} j \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j}$$

et en déduire sa valeur.

Démonstration. On reconnait l'espérance d'une variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2N, \frac{i}{2N}\right)$. D'où :

$$\boxed{S_i = 2N \frac{i}{2N} = i}$$

☐

b) En déduire que pour tout entier n, on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)$.

Démonstration. Indication : utiliser la FPT et inverser l'ordre de sommation. ☐

c) Interpréter le résultat obtenu.

Démonstration. Le nombre d'allèles de type A ne change pas en moyenne. ☐

6. On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = \mathbb{P}([X_n \in \{0,2N\}])$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1, 2N-1]\!]$. Montrer que

$$\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} \in \{0,2N\}]) \geqslant 2 \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$$

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que $[X_{n+1} \in \{0,2N\}] = [X_{n+1} = 0] \cup [X_{n+1} = 2N]$. Par incompatibilité : $\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} \in \{0,2N\}]) = \mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 0]) + \mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 2N])$.

- $\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 0]) \geqslant \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$ car $k \leqslant 2N-1$
- $\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} = 2N]) \geqslant \left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$ car $k \geqslant 1$

□

b) En déduire que, pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geqslant u_n + 2(1-u_n)\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$.

Démonstration. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = k])_{k\in[\![0,2N]\!]}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \mathbb{P}([X_{n+1} \in \{0,2N\}]) \\
&= \sum_{k=0}^{2N} \mathbb{P}([X_n = k])\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} \in \{0,2N\}]) \\
&= \sum_{k=1}^{2N-1} \mathbb{P}([X_n = k])\mathbb{P}_{[X_n=k]}([X_{n+1} \in \{0,2N\}]) + \mathbb{P}([X_n = 0])\mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} \in \{0,2N\}]) \\
&\quad + \mathbb{P}([X_n = 2N])\mathbb{P}_{[X_n=2N]}([X_{n+1} \in \{0,2N\}])
\end{aligned}$$

Or,

- $\mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} = 0]) = 1$ donc $\mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} \in \{0,2N\}]) = 1$
- $\mathbb{P}_{[X_n=2N]}([X_{n+1} = 2N]) = 1$ donc $\mathbb{P}_{[X_n=2N]}([X_{n+1} \in \{0,2N\}]) = 1$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &\geqslant \sum_{k=1}^{2N-1} \mathbb{P}([X_n = k])2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} + \mathbb{P}([X_n = 0]) + \mathbb{P}([X_n = 2N]) \\
&\geqslant u_n + 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} \sum_{k=1}^{2N-1} \mathbb{P}([X_n = k]) \\
&\geqslant u_n + 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N} (1-u_n)
\end{aligned}$$

□

c) Soit $\alpha \in]0,1[$. On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_0 = u_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = w_n + \alpha(1-w_n)$$

Justifier que la suite (w_n) est convergente et donner sa limite.

Démonstration. (w_n) est une suite arithmético-géométrique. A l'aide de la méthode du cours, on trouve

$$w_n = 1 + (u_0 - 1)(1-\alpha)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \textit{(car } |1-\alpha| < 1\textit{)}$$

□

d) Conclure et interpréter le résultat obtenu.

Démonstration. On choisit dans cette question $\alpha = 2\left(\frac{1}{2N}\right)^{2N}$. On a bien $\alpha \in]0,1[$ donc on peut appliquer la question précédente : $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Il reste à montrer que, pour tout entier n, $w_n \leqslant u_n \leqslant 1$ et à appliquer le théorème d'encadrement. L'inégalité de droite est vraie car u_n est la probabilité d'un événement. L'inégalité de gauche se démontre par récurrence. □

ECRICOME 2024

Partie I

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont tous les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

On note I_n la matrice identité d'ordre n.

1. **Étude du cas $n = 3$.**

Dans cette question, on considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que la matrice M est diagonalisable.

Démonstration.
La matrice M est symétrique donc diagonalisable. □

b) Calculer $(M+I)^2$, puis en déduire un polynôme annulateur de M.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$M + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$\boxed{(M+I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3(M+I)}$$

On en déduit que le polynôme $P(x) = (x+1)^2 - 3(x+1)$ est un polynôme annulateur de M.
Or,

$$P(x) = (x+1)(x+1-3) = (x+1)(x-2)$$

$$\boxed{\text{Le polynôme } P(x) = (x+1)(x-2) \text{ est un polynôme annulateur de } M.}$$

Commentaire

L'énoncé introduit la notation I_3, puis note I la matrice identité de taille 3…

□

c) Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de M.

Démonstration.

- D'après la question ***1.b)***,

$$\mathrm{Sp}(M) \subset \{\text{racines de } P\} = \{-1, 2\}$$

- Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_{-1}(M) & \Longleftrightarrow & (M + I_3)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & x + y + z = 0 \\ & \Longleftrightarrow & x = -y - z \end{array}$$

On en déduit que

$$\begin{array}{rcl} E_{-1}(M) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y - z \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

Commentaire

On force l'apparition des colonnes de P en prévision des prochaines questions (qu'il faut absolument lire avant de se lancer dans ces calculs de bases de sous-espaces propres).

Puisque $E_{-1}(M) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, on en déduit que -1 est valeur propre de M.

De plus, la famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_{-1}(M)$

× est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires

$$\boxed{-1 \text{ est valeur propre de } M \text{ et } \mathcal{F}_{-1} \text{ est une base de } E_{-1}(M).}$$

- On recommence pour la valeur 2.

$$\begin{aligned}
U \in E_2(M) &\iff (M - 2I_3)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + y + z &=& 0 \\ x - 2y + z &=& 0 \\ x + y - 2z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + y + z &=& 0 \\ -3y + 3z &=& 0 \\ 3y - 3z &=& 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + y + z &=& 0 \\ -3y + 3z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + y + z &=& 0 \\ -y + z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + z &=& -y \\ z &=& y \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x &=& -2y \\ z &=& y \end{array} \right. \\
&\iff x = y = z
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_2(M) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y = z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Puisque $E_2(M) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, on en déduit que 2 est valeur propre de M.

De plus, la famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_2(M)$

× est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

$$\boxed{\text{2 est valeur propre de } M \text{ et } \mathcal{F}_2 \text{ est une base de } E_2(M).}$$

□

Dans les questions qui suivent, on considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Montrer que P est inversible et que :

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Notons $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$QP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\boxed{\text{Ceci prouve que } P \text{ est inversible d'inverse } P^{-1} = Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

Dans les questions qui suivent, on pose $D = P^{-1}MP$.

e) Déterminer les coefficients de la matrice D.

Démonstration.
D'après la question ***1.d)***, la matrice P est inversible. Ainsi, la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ formée des colonnes de P est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Plus précisément, il s'agit d'une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M et P est la matrice de changement de base de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
D'après la formule de changement de base : $M = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M, rangées dans le même ordre que les vecteurs propres de la base $\mathcal{B}$.

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

□

f) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel k, $M^k = PD^kP^{-1}$.

Démonstration.
Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$: « $M^k = PD^kP^{-1}$ ».
<u>Initialisation</u> :
D'une part, $M^0 = I_3$. D'autre part, $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.
<u>Hérédité</u> : soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^kM \\ &= PD^kP^{-1}M && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= PD^kP^{-1}PDP^{-1} && \textit{(par définition de } D\textit{)} \\ &= PD^kDP^{-1} \\ &= PD^{k+1}P^{-1} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{On a montré par récurrence : pour tout entier naturel } k,\ M^k = PD^kP^{-1}.}$$

$\square$

g) Soit k un entier naturel. On admet qu'il existe deux réels a_k et b_k tels que $M^k = a_k M + b_k I_3$.
En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer a_k et b_k.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après l'énoncé : il existe deux réels a_k et b_k tels que $M^k = a_k M + b_k I_3$. Or,

$$\begin{aligned} M^k = a_k M + b_k I_3 &\iff PD^kP^{-1} = a_k PDP^{-1} + b_k PP^{-1} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.f)}}\textit{)} \\ &\iff PD^k = a_k PD + b_k P && \textit{(en multipliant par } P \textit{ à droite)} \\ &\iff D^k = a_k D + b_k I && \textit{(en multipliant par } P^{-1} \textit{ à gauche)} \end{aligned}$$

De plus, la matrice D étant diagonale, on a :

$$D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

et d'autre part :

$$a_k D + b_k I = \begin{pmatrix} -a_k + b_k & 0 & 0 \\ 0 & -a_k + b_k & 0 \\ 0 & 0 & 2a_k + b_k \end{pmatrix}$$

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} -a_k + b_k &= (-1)^k \\ 2a_k + b_k &= 2^k \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} -a_k + b_k &= (-1)^k \\ 3b_k &= 2^k + 2(-1)^k \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Par remontées, on trouve } a_k = \frac{1}{3}(2^k - (-1)^k) \text{ et } b_k = \frac{1}{3}(2^k + 2(-1)^k).}$$

$\square$

2. **Cas général : n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.**
On considère la matrice J_n carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 :

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $(J_n)^k = n^{k-1} J_n$.

Démonstration.
Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$: « $(J_n)^k = n^{k-1} J_n$ ».
<u>Initialisation</u> :

D'une part, $(J_n)^1 = J_n$ et d'autre part, $n^{1-1}J_n = J_n$.
D'où $\mathcal{P}(1)$.
<u>Hérédité</u> : soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(k)$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\begin{aligned}(J_n)^{k+1} &= (J_n)^k J_n \\ &= (n^{k-1}J_n)J_n && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= n^{k-1}J_n^2\end{aligned}$$

Or,

$$J_n^2 = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{pmatrix} = nJ_n$$

et donc

$$(J_n)^{k+1} = n^{k-1}nJ_n = n^kJ_n$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{On a montré par récurrence : pour tout entier } k \geqslant 1,\ (J_n)^k = n^{k-1}J_n.}$$

□

b) Exprimer M_n en fonction de I_n et J_n.

Démonstration.

$$\boxed{M_n = J_n - I_n}$$

□

c) En déduire, pour tout entier naturel k non nul :

$$(M_n)^k = c_kJ_n + (-1)^kI_n,$$

où :

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}(-1)^{k-i}.$$

Démonstration.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les matrices J_n et I_n commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton.

$$\begin{aligned}
(M_n)^k &= (J_n - I_n)^k \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-I_n)^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-1)^{k-i} I_n^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-1)^{k-i} && \textit{(car } J_n^i I_n^{k-i} = J_n^i I_n = J_n^i\textit{)} \\
&= (-1)^k J_n^0 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} J_n^i (-1)^{k-i} && \textit{(on sort le premier terme de la somme)} \\
&= (-1)^k I_n + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^{i-1} J_n && \textit{(d'après la question } \textbf{2.a}\textit{))} \\
&= (-1)^k I_n + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^{i-1} \right) J_n && \textit{(car } J_n \textit{ ne dépend pas de } k\textit{)}
\end{aligned}$$

On pose $c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^{i-1}$.

$$\boxed{\text{On obtient bien } (M_n)^k = c_k J_n + (-1)^k I_n \text{ comme attendu.}}$$

□

d) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n},$$

où c_k est le réel défini à la question précédente.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
c_k &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1} (-1)^{k-i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i} (-1)^{k-i} && \textit{(car } n \geqslant 2 \textit{ donc } n \neq 0\textit{)} \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^{i} (-1)^{k-i} - (-1)^k \right) \\
&= \frac{1}{n} \left((n + (-1))^k - (-1)^k \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } c_k = \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n} = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}.}$$

□

e) En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_n)^k$, en fonction de n et de k.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}(M_n)^k &= c_k J_n + (-1)^k I_n \\ &= \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} J_n + (-1)^k I_n\end{aligned}$$

Tous les coefficients diagonaux (resp. non diagonaux) de $(M_n)^k$ sont égaux, notons a (resp. b) leur valeur commune.

$$\boxed{\text{D'après la formule précédente : } a = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} + (-1)^k = \frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n} \text{ et } b = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n}.}$$

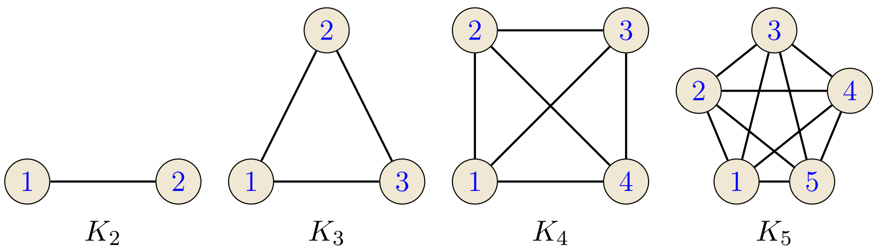
□

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un graphe non orienté K_n à n sommets numérotés de 1 à n, dans lequel chaque sommet est relié à chaque autre sommet par une arête et n'est pas relié à lui-même par une arête.

3. Représenter graphiquement les graphes K_2, K_3, K_4 et K_5.

Démonstration.
Il s'agit de graphes dits *complets*.



□

4. ***a)*** Déterminer la matrice d'adjacence du graphe K_n.

Démonstration.
Traduisons l'énoncé :

- Puisque chaque sommet est relié à tous les autres sommets, on en déduit que, sur chaque ligne de la matrice d'adjacence, tous les coefficients hors de la diagonale sont égaux à 1.
- Puisque aucun sommet n'est relié à lui-même, on en déduit que tous les coefficients diagonaux de la matrice d'adjacence sont nuls.

$$\boxed{\text{La matrice d'adjacence du graphe } K_n \text{ est la matrice } M_n.}$$

□

b) Dans le graphe K_4, combien existe-t-il de chaînes (ou chemins) de longueur 4 menant du sommet numéro 1 à lui-même.
*On pourra utiliser le résultat de la question **2.e)**.*

Démonstration. Puisque la matrice d'adjacence du graphe K_4 est la matrice M_4 (d'après la question ***4.a)***), on sait d'après le cours que le nombre de chemins de longueur 4 menant du sommet numéro 1 à lui-même est égal au coefficient en position $(1, 1)$ (première ligne, première colonne) de la matrice $(M_4)^4$.
Or, d'après la question ***2.e)***, les coefficients diagonaux de $(M_4)^4$ sont tous égaux à

$$\frac{(4-1)^4 + (4-1)(-1)^4}{4} = \frac{3^4+3}{4} = \frac{81+3}{4} = \frac{84}{4} = 21$$

$$\boxed{\text{Dans le graphe } K_4\text{, il existe 21 chemins de longueur 4 menant du sommet numéro 1 à lui-même.}}$$

□

5. Déterminer le degré de chaque sommet du graphe K_n.

Démonstration.
Le graphe K_n possède n sommets. Chaque sommet est relié à tous les autres sommets mais pas à lui-même. Ainsi, chaque sommet possède $n-1$ voisins.

$$\boxed{\text{Autrement dit, tous les sommets sont de degré } n-1.}$$

□

6. Montrer que le nombre total d'arêtes du graphe K_n est égal à $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration.
Appliquons le lemme des poignées de mains (ou formule d'Euler) :

$$\sum_{x \in S} \deg(x) = 2\,\mathrm{Card}(A)$$

où S désigne l'ensemble des sommets du graphe K_n et A désigne l'ensemble des arêtes du graphe K_n.
D'après la question ***5***, et puisque il y a n sommets dans le graphe K_n :

$$\sum_{x \in S} \deg(x) = \sum_{x \in S} (n-1) = n(n-1)$$

$$\boxed{\text{On en déduit qu'il y a } \dfrac{n(n-1)}{2} \text{ arêtes dans le graphe } K_n.}$$

□

Partie III

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et K_n le graphe défini dans la partie II. On parcourt les sommets du graphe K_n de la façon suivante :

- Initialement, à l'étape $k = 0$, on se trouve sur le sommet numéro 1.
- A chaque étape, on change de sommet en suivant au hasard, avec équiprobabilité, l'une des arêtes issues du sommet actuel.

Pour tout entier naturel k, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel on se trouve à la k^{e} étape (c'est-à-dire à l'issue du k^{e} déplacement). En particulier, X_0 est une variable aléatoire constante égale à 1.
Pour tout entier naturel k, on note V_k la matrice ligne de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ définie par :

$$V_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_k = 1]) & \mathbb{P}([X_k = 2]) & \cdots\cdots & \mathbb{P}([X_k = n]) \end{pmatrix}.$$

7. Déterminer V_0 et V_1.

Démonstration.
Tout d'abord, on sait qu'à l'étape $k = 0$, on se trouve sur le sommet numéro 1 (de manière certaine).

$$\boxed{\text{Ainsi : } V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \end{pmatrix}.}$$

Ensuite, à l'étape 1, on peut se déplacer sur n'importe lequel des sommets numérotés de 2 à n, et ce de manière équiprobable. Il y a $n-1$ tels sommets.

$$\boxed{\text{Ainsi : } V_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} \cdots\cdots \frac{1}{n-1} \end{pmatrix} \text{ (et } X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 2, n \rrbracket)\text{).}}$$

□

8. Déterminer la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
A chaque étape, il y a une probabilité de transition du sommet i vers le sommet $j \neq i$ égale à $\dfrac{1}{n-1}$ (par équiprobabilité).

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice de transition est } A_n = \frac{1}{n-1} M_n.}$$

□

9. ***a)*** Rappeler la définition d'un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un vecteur $\pi \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ vérifiant :

- tous les coefficients de π sont positifs et leur somme vaut 1,
- $\pi A_n = \pi$.

□

b) Soit V la matrice ligne de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à $\dfrac{1}{n}$:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \cdots\cdots \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Montrer que V est un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
Tout d'abord, les coefficients de V sont bien tous positifs et leur somme vaut 1. En effet :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = n\frac{1}{n} = 1$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} VA_n &= \frac{1}{n-1} VM_n && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8}}\textit{)} \\ &= \frac{1}{n-1}\frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 \cdots\cdots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \cdots\cdots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est le vecteur de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ dont le coefficient à la position i est la somme des coefficients de la colonne i de M_n. Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \cdots\cdots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 & n-1 \cdots\cdots n-1 \end{pmatrix} = (n-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \cdots\cdots 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$VA_n = \frac{1}{n-1}\frac{1}{n}(n-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \cdots\cdots 1 \end{pmatrix} = V$$

$\boxed{\text{Le vecteur } V \text{ est bien un état stable de la chaîne de Markov } (X_k)_{k\in\mathbb{N}}.}$

□

10. a) Pour tout entier naturel k, rappeler sans démonstration une expression de V_{k+1} en fonction de V_k, M_n et n, où M_n est la matrice introduite par (1) en introduction de la partie I.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{V_{k+1} = V_k \frac{1}{n-1} M_n}$$

□

b) En déduire, pour tout entier naturel k :

$$V_k = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 (M_n)^k.$$

Démonstration.
Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$: « $V_k = \dfrac{1}{(n-1)^k} V_0 (M_n)^k$ ».
Initialisation :
On a : $\dfrac{1}{(n-1)^0} V_0 (M_n)^0 = V_0 I_n = V_0$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= V_k \frac{1}{n-1} M_n && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{10.a)}}\textit{)} \\ &= \frac{1}{(n-1)^k} V_0 (M_n)^k \frac{1}{n-1} M_n && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{(n-1)^k}\frac{1}{n-1} V_0 (M_n)^k M_n \\ &= \frac{1}{(n-1)^{k+1}} V_0 (M_n)^{k+1} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{On a montré par récurrence : pour tout entier } k \geqslant 1,\ V_k = \frac{1}{(n-1)^k} V_0 (M_n)^k.}$$

□

c) En utilisant le résultat de la question ***2.e)***, en déduire que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on reconnaîtra la loi.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.
Rappelons (d'après la question ***7***) que :

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $V_0(M_n)^k$ est la première ligne de la matrice $(M_n)^k$. D'après la question ***2.e)*** et la question ***10.b)***, on en déduit que :

$$\begin{aligned} V_k &= \frac{1}{(n-1)^k} \begin{pmatrix} \frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n} & \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} \cdots\cdots \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{n} + \frac{(-1)^k}{n(n-1)^{k-1}} & \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{n(n-1)^k} \cdots\cdots \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{k+1}}{n(n-1)^k} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par définition de V_k, on a également :

$$V_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_k = 1]) & \mathbb{P}([X_k = 2]) \cdots\cdots \mathbb{P}([X_k = n]) \end{pmatrix}$$

D'où :

× $\mathbb{P}([X_k = 1]) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^k}{n(n-1)^{k-1}}$

× pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\mathbb{P}([X_k = i]) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^{k+1}}{n(n-1)^k}$

De plus, pour tout $n \geqslant 3$:

$$\left| \frac{(-1)^k}{n(n-1)^{k-1}} \right| = \frac{1}{n(n-1)^{k-1}} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$

et de même :

$$\left| \frac{(-1)^{k+1}}{n(n-1)^k} \right| = \frac{1}{n(n-1)^k} \leqslant \frac{1}{2^k}$$

Puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1}{2^k} = 0$, on en déduit par théorème d'encadrement que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(-1)^k}{n(n-1)^{k-1}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n(n-1)^k} = 0$$

Ainsi :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}([X_k = i]) = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour tout entier } n \geqslant 3, \text{ la suite } (X_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge en loi vers une variable aléatoire } Z \\ \text{qui suit la loi uniforme sur } [\![1, n]\!].\end{array}}$$

Commentaire

L'énoncé comportait ici une erreur, car l'entier n est fixé supérieur ou égal à 2, mais la convergence en loi n'est valable que pour $n \geqslant 3$. En effet, lorsque $n = 2$, il y a un phénomène d'oscillations :

$$\begin{aligned} V_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ V_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ V_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ V_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\dots \end{aligned}$$

et la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne converge pas en loi (les suites $(\mathbb{P}([X_k = i]))_{k \in \mathbb{N}}$ n'admettent pas de limite).

□

11. Comparer et commenter les résultats des questions ***9.b)*** et ***10.c)***.

Démonstration.
Dans la question ***10.c)***, on a montré que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ (ce résultat étant valable pour tout entier $n \geqslant 3$).
Dans la question ***9.b)***, on a montré que le vecteur $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \cdots\cdots \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ est un état stable de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (ce résultat étant valable pour tout entier $n \geqslant 2$).
On retrouve ainsi le résultat du cours qui affirme que si $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z, alors la loi de Z est un état stable (ou stationnaire) de la chaîne de Markov $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
Le cas $n = 2$ prouve que la réciproque de ce résultat est fausse.

Commentaire

En ne précisant pas correctement le domaine de validité de la question ***12.c)***, l'énoncé passe à côté de l'opportunité de faire comprendre au candidat que le cas $n = 2$ offre un contre-exemple simple à une question naturelle : le résultat du cours admet-t-il une réciproque ? La réponse est non, comme on vient de le voir.
En tout état de cause, une réponse beaucoup plus simple à la question ***11*** (telle que : le vecteur V est bien le vecteur encodant la loi de probabilité de Z) doit permettre d'obtenir la majorité des points à cette question.

□