

DS8 barème (version A)

Exercice 1 (EML 2010)

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application de classe C^2 sur \mathbb{R} , définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de \mathcal{C}

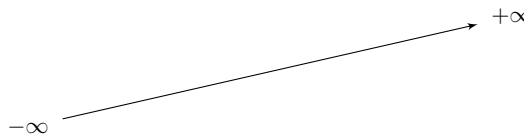
1. a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

• 1 pt : f est dérivable sur \mathbb{R} car de classe C^2 sur \mathbb{R} d'après l'énoncé

• 1 pt : $f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$

b) En déduire le sens de variation de f .

• 1 pt :

| | | | |
|-------------------|--|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| Signe de $f'(x)$ | + | 0 | + |
| Variations de f |  | | |

(les limites n'étaient pas attendues dans cette question)

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

• 1 pt : f est dérivable deux fois sur \mathbb{R} car de classe C^2 sur \mathbb{R} d'après l'énoncé

• 1 pt : $f''(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(x - 1)(x + 1)}{(1 + x^2)^2}$

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

• 1 pt : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

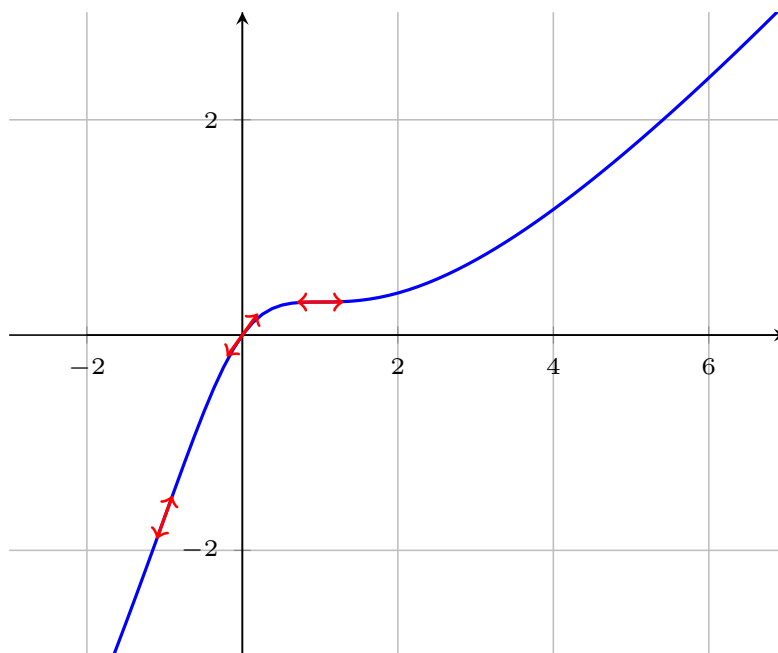
• 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (« croissances comparées » doit apparaître)

3. Montrer que \mathcal{C} admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

• 1 pt : f'' s'annule en changeant de signe en -1 et en 1

• 1 pt : La courbe représentative de f admet deux points d'inflexion : $(-1, -1 - \ln(2))$ et $(1, 1 - \ln(2))$

4. Tracer \mathcal{C} . On précisera la tangente à \mathcal{C} en l'origine et en chacun des points d'inflexion.



- 1 pt : Au point $(0, f(0))$, la courbe \mathcal{C} admet pour tangente la droite d'équation :

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$$

- 1 pt : Au point $(-1, f(-1))$, la courbe \mathcal{C} admet pour tangente la droite d'équation :

$$y = f(-1) + f'(-1)(x - (-1)) = (-1 - \ln(2)) + 2(x + 1) = 2x + (1 - \ln(2))$$

- 1 pt : Au point $(1, f(1))$, la courbe \mathcal{C} admet pour tangente la droite d'équation :

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 - \ln(2)$$

(comme $f'(1) = 0$, on obtient une tangente horizontale)

- 1 pt : monotonie, concavité et convexité respectées
- 1 pt : limites respectées

Partie II : Étude d'une fonction de deux variables réelles associée à f

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y)$$

5. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et exprimer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les dérivées partielles premières de F en (x, y) , à l'aide de f' , x et y .

- 1 pt : $F_1 : (x, y) \mapsto f(x + y)$ est de la forme $f \circ g$ où
 - × f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}
 - × $g : (x, y) \mapsto x + y$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 car polynomiale
 donc F_1 est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

(raisonnement analogue pour les autres fonctions accepté)

- 1 pt : $\partial_1(F)(x, y) = f'(x + y) - f'(x)$ et $\partial_2(F)(x, y) = f'(x + y) - f'(y)$

6. a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} f'(x) = f'(y) \\ f'(x + y) = f'(x) \end{cases} \iff \begin{cases} x(1 + y^2) = y(1 + x^2) \\ (x + y)(1 + x^2) = x(1 + (x + y)^2) \end{cases}$$

- **1 pt** : $\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{cases} f'(x) = f'(y) \\ f'(x+y) = f'(x) \end{cases}$
 - **2pts** : $\begin{cases} f'(x) = f'(y) \\ f'(x+y) = f'(x) \end{cases} \iff \begin{cases} x(1+y^2) = y(1+x^2) \\ (x+y)(1+x^2) = x(1+(x+y)^2) \end{cases}$
- b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Compléter la formule suivante : $x + xy^2 - y - yx^2 = (x - y)(\dots)$.
- **1 pt** : $x + xy^2 - y - yx^2 = (x - y)(1 - xy)$
- c) En déduire que F possède exactement trois points critiques : $(0, 0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.
- **1 pt** : $\begin{cases} x(1+y^2) = y(1+x^2) \\ (x+y)(1+x^2) = x(1+(x+y)^2) \end{cases} \iff \begin{cases} (x-y)(1-xy) = 0 \\ (x+y)(1+x^2) = x(1+(x+y)^2) \end{cases}$
 - **1 pt** :
$$\begin{cases} (x-y)(1-xy) = 0 \\ (x+y)(1+x^2) = x(1+(x+y)^2) \end{cases} \iff \begin{cases} x-y = 0 \\ (x+y)(1+x^2) = x(1+(x+y)^2) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1-xy = 0 \\ (x+y)(1+x^2) = x(1+(x+y)^2) \end{cases}$$
 - **1 pt** : $\begin{cases} x-y = 0 \\ (x+y)(1+x^2) = x(1+(x+y)^2) \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ x(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x) = 0 \end{cases}$
 - **1 pt** : $\begin{cases} 1-xy = 0 \\ (x+y)(1+x^2) = x(1+(x+y)^2) \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \quad \text{et} \quad y \neq 0 \\ y = \frac{1}{x} \\ (x + \frac{1}{x})(1+x^2) = x(1+(x + \frac{1}{x})^2) \end{cases}$
 - **1 pt** : $(x + \frac{1}{x})(1+x^2) = x(1+(x + \frac{1}{x})^2) \iff x = 0$
7. a) Calculer les dérivées partielles secondes de F .
- **1 pt** : F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 , par un raisonnement identique à celui mené en question 5
 - **1 pt** : $\partial_{1,1}^2(F)(x, y) = f''(x+y) - f''(x)$ et $\partial_{2,2}^2(F)(x, y) = f''(x+y) - f''(y)$
 - **1 pt** : $\partial_{2,1}^2(F)(x, y) = f''(x+y)$ et $\partial_{1,2}^2(F)(x, y) = f''(x+y)$
- b) Est-ce que F admet un extremum local en $(0, 0)$?
- **1 pt** : $\nabla^2(F)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
 - **1 pt** : $\text{Sp}(\nabla^2(F)(0, 0)) = \{-2, 2\}$
 - **1 pt** : les deux valeurs propres de $\nabla^2(F)(0, 0)$ sont non nulles et de signes opposés, donc $(0, 0)$ est un point selle. F n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.
- c) Montrer que F admet un extremum local en $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Préciser sa nature.
- **1 pt** : $\nabla^2(F)(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3^2} \\ \frac{2}{3^2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
 - **1 pt** : $\text{Sp}(\nabla^2(F)(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})) = \{\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\}$
 - **1 pt** : les deux valeurs propres de $\nabla^2(F)(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ sont strictement positives, donc $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ est un minimum local.
- d) En déduire la nature du point critique $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.
- **1 pt** : Comme tous les termes sont au carré, on a la même matrice hessienne en $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Ainsi, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ est un minimum local.

Exercice 2 (ECRICOME 2020)

Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$$

Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

• 1 pt : $\int_a^B \frac{1}{t^n} dt = \int_a^B t^{-n} dt = \left[\frac{1}{-n+1} t^{-n+1} \right]_a^B = \frac{1}{-n+1} \left(\frac{1}{B^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}} \right)$

• 1 pt : comme $n-1 > 0$: $\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{B^{n-1}} = 0$.

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

a) Démontrer que f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

• 1 pt : La fonction f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en a

• 1 pt : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$

• 1 pt : $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^4} dt = 3a^3 I_4(a) = \cancel{3a^3} \frac{1}{\cancel{3a^3}} = 1$

• 1 pt : la question précédente est citée avec $n = 4 \geq 2$

b) Donner la fonction de répartition de X .

• 1 pt : dans la suite, on considère : $X(\Omega) = [a, +\infty[$

• 1 pt : si $x \in [a, +\infty[$: $F_X(x) = 1 - \frac{a^3}{x^3}$

• 1 pt : si $x \in]-\infty, a[$: $F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (seulement si l'autre calcul est correct)

c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.

• 1 pt : la v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment

• 1 pt : question 1 citée avec $n = 3$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ converge

• 1 pt : $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2} a$

d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\frac{3a^2}{4}$.

• 1 pt : La v.a.r. X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment

- **1 pt** : question 1 citée avec $n = 2$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ converge
- **1 pt** : $\mathbb{E}(X^2) = \int_a^{+\infty} t^2 f(t) dt = 3a^3 I_2(a) = 3a^3 \frac{1}{a} = 3a^2$
- **1 pt** : formule de Koenig-Huygens citée pour conclure : $\mathbb{V}(X) = \frac{3}{4} a^2$

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1]$. On pose : $Y = \frac{a}{U^{\frac{1}{3}}}$.

a) Déterminer $Y(\Omega)$.

- **1 pt** : notons $h : x \mapsto \frac{a}{x^{\frac{1}{3}}}$, de sorte que $Y = h(U)$
- **1 pt** : $Y(\Omega) = h(]0, 1]) = [h(1), \lim_{x \rightarrow 0} h(x)[= [a, +\infty[$

b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que Y et X suivent la même loi.

- **1 pt** : si $x \in [a, +\infty[$: $F_Y(x) = 1 - F_U\left(\left(\frac{a}{x}\right)^3\right)$
- **1 pt** : argument U est une v.a.r. à densité
- **1 pt** : argument $a > 0$
- **1 pt** : si $x \in]-\infty, a[$: $F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (si l'autre calcul est correct)
- **1 pt** : $0 \leq \left(\frac{a}{x}\right)^3 \leq 1$
- **1 pt** : $F_U\left(\left(\frac{a}{x}\right)^3\right) = \left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a^3}{x^3}$ donc $F_Y(x) = 1 - \frac{a^3}{x^3}$
- **1 pt** : la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. . On en déduit que les v.a.r. X et Y ont même loi

c) Écrire une fonction **Python** nommée `simulX(a, m, n)` prenant en argument un réel a strictement positif et deux entiers naturels m et n non nuls, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X . Ces réels seront choisis de façon indépendante. On rappelle que si m et n sont des entiers naturels non nuls, l'instruction `rd.random([m,n])` renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, ces coefficients étant choisis de façon indépendantes.

- **1 pt** : `U = rd.random([m,n])`
- **1 pt** : `return a / (U**(1/3))`

```

1 def simulX(a,m,n):
2     U = rd.random([m,n])
3     return a / (U**(1/3))

```

ou, encore plus court,

```

1 def simulX(a,m,n):
2     return a / (rd.random([m,n])**1/3)

```

4. a) Calculer $\mathbb{P}([X > 2a])$.

- **1 pt** : $\mathbb{P}([X > 2a]) = 1 - \mathbb{P}([X \leq 2a]) = 1 - F_X(2a)$
- **1 pt** : $2a \geq a$ donc $\mathbb{P}([X > 2a]) = 1 - \left(1 - \frac{a^3}{(2a)^3}\right) = \frac{a^3}{8a^3} = \frac{1}{8}$

b) Calculer $\mathbb{P}_{[X>2a]}([X > 6a])$.

• 1 pt : comme $6a \geq 2a : [X > 6a] \subset [X > 2a]$

• 1 pt : $\mathbb{P}([X > 6a]) = 1 - F_X(6a) = 1 - \left(1 - \frac{a^3}{(6a)^3}\right) = \frac{a^3}{6^3 a^3} = \frac{1}{6^3}$

• 1 pt : $\mathbb{P}_{[X>2a]}([X > 6a]) = \frac{1}{27}$

c) On suppose que la fonction **Python** de la question 3.c) a été programmée correctement. Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente.

```

1  a = 10
2  N = 100000
3  s1 = 0
4  s2 = 0
5  X = simulX(a, 1, N)[0]
6  for k in range(N):
7      if X[k] > 2*a :
8          s1 = s1 + 1
9          if X[k] > 6*a:
10             s2 = s2 + 1
11  if s1 > 0:
12      print( s2/s1 )
    
```

• 1 pt : $X[k] > 2*a$

• 1 pt : $s2 = s2 + 1$

• 1 pt : $s2/s1$

• 1 pt : point de bonification si tout est juste

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a .

On dit qu'un estimateur T_n de a est *sans biais* si $\mathbb{E}(T_n) = a$.

Soit n un entier naturel non nul, et X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X .

5. On pose : $V_n = \frac{2}{3n} \sum_{k=1}^n X_k$.

a) Montrer que V_n est un estimateur sans biais pour le paramètre a .

• 1 pt : V_n est bien un estimateur de a

• 1 pt : La v.a.r. V_n admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une

• 1 pt : $\mathbb{E}(V_n) = a$

• 1 pt : linéarité de l'espérance

b) Montrer que $\mathbb{V}(V_n) = \frac{a^2}{3n}$.

• 1 pt : La v.a.r. V_n admet une variance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une

• 1 pt : $\mathbb{V}(V_n) = \frac{a^2}{3n}$

• 1 pt : par indépendance

6. On pose : $W_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.

• 1 pt : $W_n(\Omega) \subset [a, +\infty[$

• 1 pt : si $x \in [a, +\infty[: F_{W_n}(x) = 1 - \frac{a^{3n}}{x^{3n}}$

• 1 pt : par indépendance des X_k

• 1 pt : si $x \in]-\infty, a[: F_{W_n}(x) = \mathbb{P}([W_n \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (si l'autre calcul est correct)

• 1 pt : La fonction F_{W_n} est continue sur \mathbb{R} .

• 1 pt : La fonction F_{W_n} de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en a .

b) Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

• 1 pt : Pour déterminer une densité f_n de W_n , on dérive sa fonction de répartition F_{W_n} sur les intervalles ouverts $] -\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ où F_{W_n} est de classe \mathcal{C}^1

• 1 pt : On choisit enfin : $f_n(a) = \frac{3na^{3a}}{a^{3n+1}}$

c) Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance.

Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais pour le paramètre a .

• 1 pt : La v.a.r. W_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer qu'elle est convergente pour un calcul de moment

• 1 pt : d'après la question 1. appliquée à $3n \geq 2$ (car $n \geq 1$)

• 1 pt : $\mathbb{E}(W_n) = \frac{3n}{3n-1} a$

• 1 pt : On pose alors $\lambda_n = \frac{3n-1}{3n}$

• 1 pt : par linéarité de l'espérance

d) Montrer que $\mathbb{V}(\lambda_n W_n) = \frac{a^2}{3n(3n-2)}$.

• 1 pt : La v.a.r. W_n admet une variance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t) dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer qu'elle est convergente pour un calcul de moment

• 1 pt : d'après la question 1. appliquée à $3n-1 \geq 2$ (car $n \geq 1$)

• 1 pt : $\mathbb{E}(W_n^2) = \int_a^{+\infty} t^2 f_n(t) dt = 3n a^{3n} I_{3n-1}(a) = 3n a^{3n} \frac{1}{(3n-2) a^{3n-2}} = \frac{3n}{3n-2} a^2$

• 1 pt : $\mathbb{V}(W_n) = \frac{3n}{(3n-2)(3n-1)^2} a^2$

• 1 pt : La v.a.r. $\lambda_n W_n$ admet une variance en tant que transformée affine de la v.a.r. W_n qui en admet une.

• 1 pt : $\mathbb{V}(\lambda_n W_n) = \frac{a^2}{3n(3n-2)}$

7. Comparer les variances des estimateurs V_n et $\lambda_n W_n$. Quel est le meilleur estimateur selon vous ?

- 1 pt : pour tout $n \geq 1$, $3n - 2 \geq 1$ et donc $\mathbb{V}(\lambda_n W_n) \leq \mathbb{V}(V_n)$
- 1 pt : $\lambda_n W_n$ est un meilleur estimateur que V_n car il prend des valeurs plus proches de a que V_n en moyenne

8. On rappelle que si A est un tableau (ou un vecteur ligne) **Python**, l'instruction `sum(A)` renvoie la somme des coefficients du tableau A .

a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'un tableau à m éléments :

```
1 def simulV(a,m,n):
2     X = simulX(a,m,n)
3     V = np.zeros(m)
4     for k in range(m) :
5         V[k] = (2/(3*n))*sum(X[k])
6     return V
```

- 1 pt : `range(m)`
- 1 pt : `(2/(3*n))*sum(X[k])`

Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire `simulW` permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.

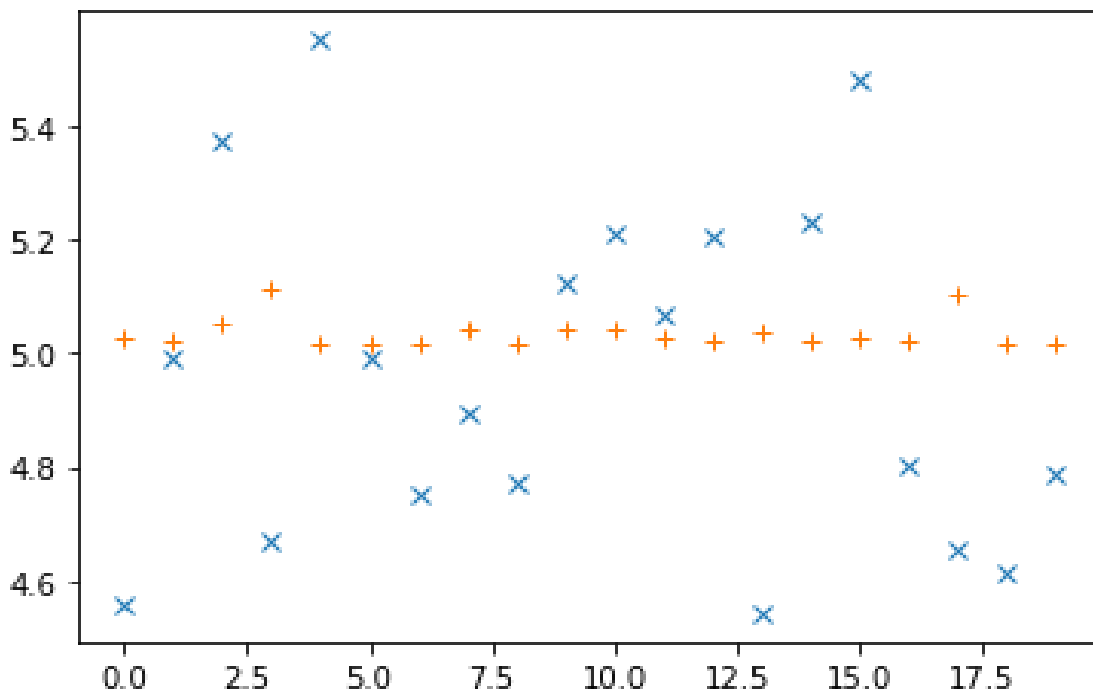
b) Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```
1 V = simulV(..., ..., ...)
2 W = simulW(..., ..., ...)
3 plt.plot(..., 'x')
4 plt.plot(..., '+')
```

On justifiera la réponse pour les deux dernière lignes à l'aide de la question 7.

```
1 V = simulV(5,20,100)
2 W = simulW(5,20,100)
3 plt.plot(V, 'x')
4 plt.plot(W, '+')
```

- 1 pt : `V = simulV(5,20,100)`
- 1 pt : `W = simulW(5,20,100)`
- 1 pt : `plt.plot(V, 'x')`
- 1 pt : `plt.plot(W, '+')`
- 1 pt : d'après la question 7, l'estimateur $\lambda_n W_n$ est meilleur que l'estimateur V_n , donc le vecteur W (contenant des simulations de $\lambda_n W_n$) est représenté par les croix droites, et le vecteur V (contenant des simulations de V_n) est représenté par les croix obliques



Problème (EDHEC 2017)

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

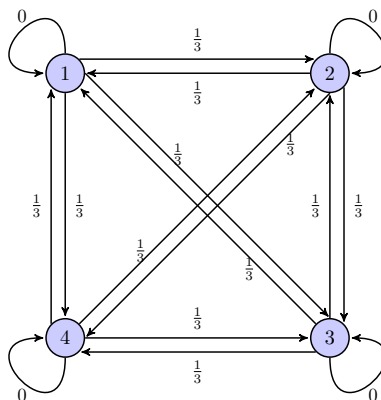
Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n . D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Représenter le graphe probabiliste associé à cette chaîne de Markov.

- 2 pts :



2. Donner la loi de X_1 , ainsi que l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ de la variable X_1 .

- 1 pt : À l'instant 0, le mobile se trouve sur le sommet 1. Il peut alors se déplacer sur les sommets 2, 3 et 4. $X_1(\Omega) = \{2, 3, 4\}$
- 1 pt : ce choix se fait de manière équiprobable, donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 2, 4 \rrbracket)$
- 1 pt : $\mathbb{E}(X_1) = 3$

On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \mathbb{P}([X_2 = 4]) = \frac{2}{9}$$

3. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n .

- 1 pt : les 4 sommets sont atteignables à l'instant 2 et qu'il en est donc de même aux instants suivants
- 1 pt : $X_n(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$

4. a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3} (\mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]))$$

- 1 pt : D'après la question précédente, $X_n(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ donc $\left([X_n = k] \right)_{k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ est un système complet d'événements.
- 1 pt : d'après l'énoncé, pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$:

$$\mathbb{P}_{[X_n = k]}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3} \text{ si } k \neq 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{[X_n = 1]}([X_{n+1} = 1]) = 0$$

b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

- 2 pts : Si $n = 0$: d'après l'énoncé, le mobile se trouve en position 1 à l'instant 0. Ainsi :

$$\mathbb{P}([X_0 = 1]) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_0 = 2]) = \mathbb{P}([X_0 = 3]) = \mathbb{P}([X_0 = 4]) = 0$$

Ainsi : $\sum_{k=2}^4 \mathbb{P}([X_n = k]) = 0.$

Comme le mobile se déplace, il ne peut se trouver en position 1 à l'instant 1 : $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = 0.$

La relation est vérifiée pour $n = 0$.

- 1 pt : d'après l'énoncé, $\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{3}.$

Or, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 2, 4 \rrbracket)$ donc $\sum_{k=2}^4 \mathbb{P}([X_n = k]) = 3 \times \frac{1}{3} = 1.$

On a bien $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{3} (\mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]))$

La relation est vérifiée pour $n = 1$.

c) Justifier que, pour tout n de \mathbb{N} , on a $\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) = 1$ et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = -\frac{1}{3} \mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{1}{3}$$

- **1 pt** : La famille $([X_n = k])_{k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ est un système complet d'événements (qui contient éventuellement \emptyset pour les cas $n = 0$ et $n = 1$). On en déduit :

$$\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]) = 1$$

- **1 pt** : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = -\frac{1}{3} \mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{1}{3}$

d) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

- **1 pt** : initialisation
- **2 pts** : hérédité

5. a) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) = \frac{1}{3} (\mathbb{P}([X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]))$$

- **1 pt** : cas $n \geq 1$
- **1 pt** : cas $n = 0$

b) En déduire une relation entre $\mathbb{P}([X_{n+1} = 2])$ et $\mathbb{P}([X_n = 2])$.

- **2 pts** : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) = -\frac{1}{3} \mathbb{P}([X_n = 2]) + \frac{1}{3}$

c) Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_n = 2]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

- **1 pt** : initialisation
- **2 pts** : hérédité

6. On admet que, pour tout entier naturel n , on a :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 3]) = -\frac{1}{3} \mathbb{P}([X_n = 3]) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_{n+1} = 4]) = -\frac{1}{3} \mathbb{P}([X_n = 4]) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_n = 3]) = \mathbb{P}([X_n = 4]) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

- **1 pt** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = \mathbb{P}([X_n = 3])$ et $t_n = \mathbb{P}([X_n = 4])$. Les suites (s_n) et (t_n) vérifient la même relation de récurrence que la suite (r_n) . De plus, on a : $r_0 = s_0 = t_0 = 0$.

7. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n .

- **1 pt** : La v.a.r. X_n est finie. Elle admet donc une espérance.

- **1 pt** : $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^4 k \times \mathbb{P}([X_n = k])$

- **1 pt** : $\mathbb{E}(X_n) = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

8. Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on reconnaîtra la loi. En déduire un état stable de la chaîne de Markov.

- **1 pt** : Comme $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, il vient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$

- **1 pt** : pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{1}{4}$, donc (X_n) converge en loi vers $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$

- **1 pt** : $\pi = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}\right)$ est un état stable de la chaîne de Markov

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de \mathbb{N} , on considère la matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n = (\mathbb{P}([X_n = 1]) \quad \mathbb{P}([X_n = 2]) \quad \mathbb{P}([X_n = 3]) \quad \mathbb{P}([X_n = 4]))$$

9. a) Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n A$$

- 1 pt : Le coefficient de la première colonne est :

$$\frac{1}{3} (\mathbb{P}([X_n = 2]) + \mathbb{P}([X_n = 3]) + \mathbb{P}([X_n = 4]))$$

D'après la question 3.a), ce coefficient est : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1])$

- 1 pt : idem pour les autres coefficients

b) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 A^n$.

- 1 pt : initialisation
- 1 pt : hérédité

c) En déduire la première ligne de A^n .

- 1 pt : $U_0 = (\mathbb{P}([X_0 = 1]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 2]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 3]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 4])) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ donc $U_0 A^n$ est la première ligne de A^n

- 1 pt : La première ligne de A^n est $U_n = (\mathbb{P}([X_n = 1]) \quad \mathbb{P}([X_n = 2]) \quad \mathbb{P}([X_n = 3]) \quad \mathbb{P}([X_n = 4]))$, à savoir : $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$

d) Compléter le script suivant pour qu'il affiche le n^e état de la chaîne de Markov en utilisant la matrice A. On pourra utiliser les fonctions `al.matrix_power` et `np.dot`.

```

1 n = int(input('Rentrez la valeur de n :'))
2 A = (1/3) * np.array([[0,1,1,1], [1,0,1,1], [1,1,0,1], [1,1,1,0]])
3 U = np.array([1,0,0,0])
4 print(np.dot(U,al.matrix_power(A,n)))
```

- 1 pt : `A = (1/3) * np.array([[0,1,1,1], [1,0,1,1], [1,1,0,1], [1,1,1,0]])`
- 1 pt : `U = np.array([1,0,0,0])`
- 1 pt : `print(np.dot(U,al.matrix_power(A,n)))`

10. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n , puis écrire ces trois lignes.

- 1 pt : En plaçant le mobile initialement en position 2, la multiplication $U_0 A^n$ permet de récupérer la deuxième ligne de A^n
- 1 pt : La deuxième ligne de A^n est :

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

- **1 pt** : La troisième ligne de A^n est :

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

et la quatrième ligne de A^n est :

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

- **1 pt** : $A = -\frac{1}{3} I + \frac{1}{3} J$ ou ($a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{3}$)

12. a) Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1} J$.

- **1 pt** : $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot J$

- **1 pt** : initialisation

- **1 pt** : hérédité

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J .

- **1 pt** : I et J commutent

- **1 pt** : formule du binôme correcte

- **1 pt** : $I^{n-k} J^k = I J^k = J^k$

- **1 pt** : $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^k = (-1+4)^n - (-1)^n = 3^n - (-1)^n$

- **2 pts** : $A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) J$

c) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.

- **1 pt** : (*aucun point en cas d'erreur de logique*)

Partie 4 : informatique

13. a) Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle :

- prenne en argument la position x à un instant donné
- renvoie la position du mobile à l'instant suivant

On rappelle que `rd.randint(a,b)` simule un tirage uniforme dans $\llbracket a, b - 1 \rrbracket$.

```

1 def EtapeMarkov(x):
2     L = [1,2,3,4]
3     L.pop(x-1) # supprime le sommet x de la liste
4     i = rd.randint(0,3)
5     return L[i]
```

- **1 pt** : `i = rd.randint(0,3)`

- b) Compléter le script **Python** suivant pour qu'il affiche les 100 premières positions autres que celle d'origine du mobile dont le voyage est étudié dans ce problème, ainsi que le nombre n de fois où il est revenu sur le sommet numéroté 1 au cours de ses 100 premiers déplacements.

```
1  chaine = []
2  x = 1 # point de départ
3  for k in range(100):
4      x = EtapeMarkov(x)
5      chaine.append(x)
6  print(chaine)
7  cpt = 0
8  for k in range(100):
9      if chaine[k] == 1 :
10         cpt = cpt+1
11  print(cpt)
```

- 1 pt : $x = 1$ # point de départ
 - 1 pt : $x = \text{EtapeMarkov}(x)$
 - 1 pt : $\text{if chaine}[k] == 1$:
 - 1 pt : $\text{cpt} = \text{cpt}+1$
 - 1 pt : point de bonification si tout est juste
- c) Après avoir exécuté cinq fois ce script, les réponses concernant le nombre de fois où le mobile est revenu sur le sommet 1 sont : $n = 23, n = 28, n = 23, n = 25, n = 26$.
En quoi est-ce normal ?
- 1 pt : à chaque étape (hormis la 1^{ère}), le mobile a environ 1 chance sur 4 de se retrouver en position 1. Donc en 99 étapes, il est passé par la position 1 environ $99 \times \frac{1}{4} \simeq 25$ fois