1 Indicatrices

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

On distingue deux types d'indicatrices qu'il ne faut pas confondre.

- Si A est un événement, on note
$$\mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
la *variable aléatoire indicatrice* de l'événement A.
- Si I est une partie de $\mathbb{R}$, on note
$$\mathbb{1}_I : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
la *fonction indicatrice* de I.

Soient A et B deux événements

1. Reconnaître l'événement $[\mathbb{1}_A = 1]$ puis reconnaître la loi de $\mathbb{1}_A$. Donner son espérance et sa variance.
2. Montrer que $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}$.
3. Montrer que $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{\overline{A}} = 1$.
4. Montrer que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.
5. En déduire que, si A et B sont incompatibles, alors $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.
6. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.
7. En déduire que $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont indépendantes si et seulement si A et B sont indépendants.

Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$.

8. Montrer que $\mathbb{1}_I \times \mathbb{1}_J = \mathbb{1}_{I\cap J}$.
9. Montrer que $\mathbb{1}_I + \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus I} = 1$.

Soit X une variable aléatoire et soit $a \in \mathbb{R}$.

10. Montrer que $\mathbb{1}_{[a,+\infty[}(X) = \mathbb{1}_{[X\geqslant a]}$.
11. On suppose dans cette question que X admet une densité notée f. Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Démontrer que la variable aléatoire $g(X)\mathbb{1}_{[X\geqslant a]}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale
$$\int_a^{+\infty} g(t)f(t)\ \mathrm{d}t$$
converge absolument.

Inégalité de Boole - Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $B_1, \dots, B_k$ des événements. On pose $T = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{B_i}$.

12. Montrer que $\mathbb{P}(T \geq 1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right)$.
13. En utilisant une inégalité du cours, que l'on énoncera précisément, en déduire que :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)$$

2 Fonction génératrice des probabilités

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$, on note

$$G_X(t) = \mathbb{E}\left(t^X\right)$$

et on appelle G_X la *fonction génératrice des probabilités* associée à X.

1. (a) Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, la série $\sum t^k \mathbb{P}([X=k])$ converge.
   (b) En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$, $\mathbb{E}\left(t^X\right)$ existe et
   $$\mathbb{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \mathbb{P}([X=k])$$
2. (a) Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes, alors
   $$\forall t \in [0,1],\ G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t)$$
   (b) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et mutuellement indépendantes. Montrer que :
   $$G_{\sum_{i=1}^n X_i} = \prod_{i=1}^n G_{X_i}$$
3. Soit $t \in [0,1]$.
   (a) On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où $p \in\ ]0,1[$. Montrer que $G_X(t) = pt + 1 - p$.
   (b) On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in\ ]0,1[$. Montrer que $G_X(t) = (pt+1-p)^n$.
   (c) On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $G_X(t) = \begin{cases} \frac{t}{n}\frac{1-t^n}{1-t} & \text{si } t<1 \\ 1 & \text{si } t=1 \end{cases}$.
   (d) On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in\ ]0,1[$. Montrer que $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$.
   (e) On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.
4. (a) Montrer que $G_X(0) = \mathbb{P}([X=0])$.
   (b) Montrer que, pour tout $t \in]0,1]$,
   $$\frac{G_X(t) - G_X(0)}{t} = \mathbb{P}([X=1]) + t\sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1}\mathbb{P}([X=k+1])$$
   puis en déduire que $G'_X(0) = \mathbb{P}([X=1])$.
   (c) On admet que, pour tout $t \in [0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$G_X^{(n)}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(k-i)\right) t^{k-n}\mathbb{P}([X=k])$$
   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X=n]) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$.
   (Ainsi, la fonction génératrice des probabilités caractérise la loi)
   (d) Démontrer que la fonction génératrice des probabilités caractérise la loi sans utiliser le résultat précédent.
5. Déduire des questions précédentes une preuve des deux résultats de cours suivants :
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in]0,1[$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi $\mathcal{B}(p)$. Alors $\sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
   (b) Soient $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux variables aléatoires indépendantes. Alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire **finie**, toujours à valeurs entières positives.

6. (a) Vérifier que G_X est alors une fonction polynomiale.
   (b) Montrer que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.
   (c) Montrer que $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.

3 Fonction génératrice des moments

Soit X une variable aléatoire. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, on note

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

et on appelle M_X la *fonction génératrice des moments* associée à X.

1. Vérifier que $M_X(0) = 1$ puis que $M_X(t) \geqslant 0$ sous réserve d'existence.
2. *Une formule pour le cas discret et une autre pour le cas à densité.*
   (a) On suppose dans cette question que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que, sous réserve d'existence,
   $$M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{tk}\mathbb{P}([X = k]) = G_X\left(\mathrm{e}^t\right)$$
   où G_X est définie en début de partie 2.
   (b) On suppose dans cette question que X est une variable aléatoire admettant une densité f nulle en dehors de $]a, b[$, où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que, sous réserve d'existence,
   $$M_X(t) = \int_a^b \mathrm{e}^{tx} f(x)\,\mathrm{d}x$$
3. *Une fonction qui porte bien son nom.* On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est un ensemble fini.
   (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$M_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathrm{e}^{tk}\mathbb{P}([X = k])$$
   (b) En déduire que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, que X admet des moments à tout ordre, et que pour tout $r \in \mathbb{N}$,
   $$M_X^{(r)}(0) = \mathbb{E}(X^r)$$
   $\hookrightarrow$ Pour généraliser ce résultat au cas X infinie ou X à densité, il faut des théorèmes de dérivation sous le symbole somme ou intégral, qui sont hors programme.
4. *Fonction génératrice des moments d'une combinaison linéaire.*
   (a) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que, si $M_X(t)$ et $M_Y(t)$ sont bien définis, alors $M_{X+Y}(t)$ est bien défini et on a :
   $$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$$
   (b) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que, si $M_{X_i}(a_i t)$ est bien défini pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors $M_{\sum_{i=1}^n a_i X_i}(t)$ est bien défini et on a :
   $$M_{\sum_{i=1}^n a_i X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(a_i t)$$
5. (a) On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ où $a < b$. Montrer que $M_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}\dfrac{\mathrm{e}^{tb} - \mathrm{e}^{ta}}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.
   (b) On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda > 0$. Montrer que $M_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$ pour tout $t < \lambda$.
   (c) On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $M_X(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (d) En déduire que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, alors $M_X(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + mt}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.