

Colles de Mathématiques en E2A

Convergence en loi

Semaine 22 : 9 - 13 mars

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre XVII : Convergence et approximation

1.1 Définitions

- Convergence en loi.

(On a vu la notion de convergence simple d'une suite de fonctions en cours pour préparer la définition de la convergence en loi, mais cette notion est hors-programme)

1.2 Résultats

- Inégalité de Markov. Conséquence pour une v.a.r. admettant un moment d'ordre m .
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres.
- Traduction de la convergence en loi dans deux cas particuliers (v.a.r. à densité et v.a.r. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$). Il faut aussi avoir en tête le cas particulier d'une chaîne de Markov (suite de v.a.r. discrètes finies à valeurs dans $\llbracket 1, r \rrbracket$ ou $\llbracket 0, r \rrbracket$ selon les exercices).
- Convergence en loi de (X_n) où $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ avec $\lambda > 0$. Il faut savoir refaire le calcul, car il illustre plusieurs techniques importantes qui peuvent servir ailleurs.
- Théorème central limite (TCL).
- Si S_n^* converge en loi vers $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ d'après le TCL, alors pour n suffisamment grand, la v.a.r. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ suit approximativement la loi $\mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$ (où $m = \mathbb{E}(X_i)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_i)$). Ce résultat n'est pas à connaître par coeur, il faut par contre connaître la méthode et savoir le retrouver rapidement. On pourra retenir par coeur que la loi de S_n est approchée par une loi normale dont il faut déterminer les paramètres par le calcul.

1.3 Méthodes

Pour montrer que (X_n) converge en loi vers X , on est amené à fixer $x \in \mathbb{R}$ et à séparer des cas avant de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x)$.

- Il est IMPERATIF de ne faire que des cas qui ne dépendent pas de n . Autrement dit, on doit fixer x dans un intervalle qui ne dépend pas de n .

- Au brouillon, on fait les « limites d'intervalles de définitions de F_{X_n} », ce qui donne les cas à séparer.
- On écrit les différents cas avec des inégalités **STRICTES**, ce qui revient à se placer sur des intervalles **OUVERTS**.
- On réfléchit à la fin aux points de recollement. En général on peut les rajouter à l'un des cas précédents gratuitement. Si ce n'est pas le cas, on les traite à part (un cas pour chaque point de recollement qui pose problème). On gardera en tête que la limite ne nous intéresse que si x est un point de continuité de F_X (pour ne pas faire de calculs inutiles).

2 Questions de cours

1. Citer puis démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à l'aide de l'inégalité de Markov.
2. Citer puis démontrer la loi faible des grands nombres à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Citer le théorème central limite et démontrer que $S_n^* = \overline{X}_n^*$.
4. Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. . On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
5. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. . On suppose que : $\forall n \geq 3, X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}])$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. (exo 7 du TD reformulé)