

Autour de la ruine du joueur - Correction

Soit m un réel strictement positif. On considère le jeu de paris suivant :

- Le joueur possède un capital initial de m euros.
- Le joueur effectue une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée.
- A chaque lancer, si la pièce tombe sur **Pile**, le capital est augmenté de 50%, et si la pièce tombe sur **Face**, le capital est diminué de 40%.

On pose $X_0 = m$ et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- X_n la variable aléatoire égale au capital après n lancers de la pièce (ou n paris),
- $Z_n = \frac{X_n}{X_{n-1}}$,
- Y_n la variable aléatoire égale à 1 si la pièce tombe sur **Pile** lors du n^e lancer, et 0 sinon.

1. **Question de cours** : Lemme des coalitions.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $Z_n = \left(1 + \frac{1}{2}Y_n\right) \left(1 - \frac{2}{5}(1 - Y_n)\right)$ puis calculer $\Delta = \mathbb{E}(Z_n)$.

b) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = m\Delta^n$ puis donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n)$. Ce résultat vous donne-t-il envie d'accepter le pari sur 100 lancers avec une mise initiale de 100 euros ?

3. a) Écrire une fonction **Python**, nommée `un_pari`, qui prend en argument un capital `c` et qui renvoie le nouveau capital après simulation d'un lancer de pièce.

b) Écrire une fonction **Python**, nommée `suite_paris`, qui prend en argument le capital initial `m` et un entier `n`, qui simule `n` lancers et qui renvoie la liste des valeurs simulées de X_0, \dots, X_n .

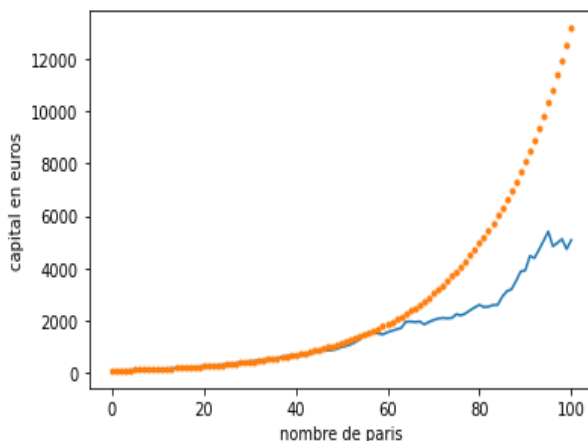
c) Écrire une fonction **Python**, nommée `plusieurs_suites_paris`, qui prend en arguments d'entrée le capital initial `m`, le nombre de paris simulés `n` et le nombre de joueurs `N`. Cette fonction doit simuler les `n` paris de ces `N` joueurs (qui possèdent tous le même capital initial) et doit renvoyer une matrice M telle que la ligne i de M contient les valeurs simulées de X_0, \dots, X_n pour le joueur i .

d) On considère la fonction `mystere` suivante :

```

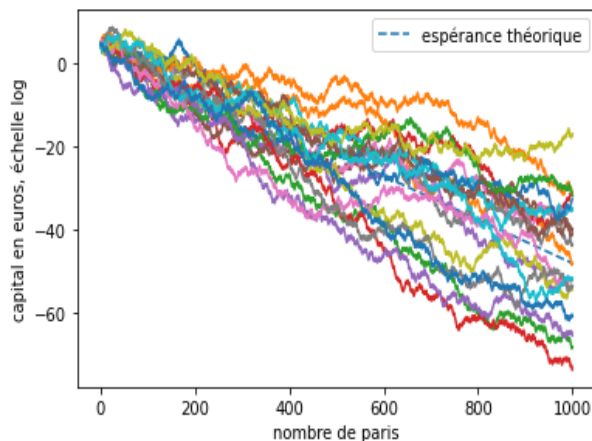
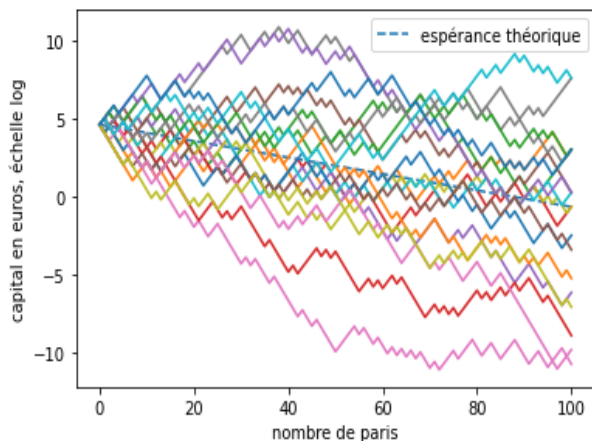
1  def mystere(mise_depart, nb_paris, nb_joueurs):
2      M = plusieurs_suites_paris(mise_depart, nb_paris, nb_joueurs)
3      liste_temps = [k for k in range(nb_paris+1)]
4      liste_mystere_1 = [np.mean(M[:,j]) for j in liste_temps]
5      plt.plot(liste_temps, liste_mystere_1)
6      liste_mystere_2 = [mise_depart * (1.05 ** n) for n in liste_temps]
7      plt.plot(liste_temps, liste_mystere_2, '.')
8      plt.xlabel('nombre de paris')
9      plt.ylabel('capital en euros')
10     plt.show()
```

On reproduit ci-après la figure produite par l'appel `mystere(100, 100, 100000)`. Expliquer ce que représentent les deux courbes. Que remarque-t-on ?



4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Calculer $\theta = \mathbb{E}(\ln(Z_n))$. Quel est le signe de θ ?
- b) En déduire une expression de $\mathbb{E}(\ln(X_n))$ en fonction de n , m et θ .
- c) Écrire une fonction **Python**, nommée `evolution_joueurs`, qui prend en arguments d'entrée le capital initial m , le nombre de paris simulés n et le nombre de joueurs N . Cette fonction doit simuler les n paris de ces N joueurs (qui possèdent tous le même capital initial) et doit tracer les valeurs simulées de $\ln(X_0), \dots, \ln(X_n)$ pour chacun des joueurs, ainsi que la suite des espérances théoriques $(\mathbb{E}(\ln(X_k)))_{k \geq 0}$ au cours des n paris.
- d) On reproduit ci-dessous les graphiques obtenus par les appels de `evolution_joueurs(100, 100, 20)` et `evolution_joueurs(100, 1000, 20)`.



Quelle conjecture peut-on faire sur le capital d'un joueur après un grand nombre de paris d'après ces graphiques ?

- e) Comment se transforme le capital au cours d'une période de deux paris consécutifs dont l'un est gagnant et l'autre perdant ? En utilisant cette remarque, justifier à l'aide d'un théorème du cours la conjecture précédente.
5. La stratégie initiale consiste à investir tout son capital dans les paris successifs. On souhaite changer cette stratégie en n'investissant qu'une fraction $x \in]0, 1[$ du capital possédé. On se demande quelle fraction est optimale.

- a) Montrer que pour maximiser $\mathbb{E}(\ln(X_n))$, il faut maximiser la fonction $f : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{2}x\right) \left(1 - \frac{2}{5}x\right)$.
- b) Calculer en quel point x_0 la fonction f admet un maximum. En choisissant cette fraction x_0 de capital investie à chaque pari, quelle proportion du capital est risquée à chaque pari ?

Correction

1. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes ($n \geq 2$).

- Soit $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Soient U une variable aléatoire fonction de X_1, \dots, X_p et V une variable aléatoire fonction de X_{p+1}, \dots, X_n . Alors U et V sont indépendantes.
- Soient f_1, \dots, f_n des fonctions réelles. Alors les variables aléatoires $f(X_1), \dots, f(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Soit $\omega \in \Omega$.

Premier cas : $Y_n(\omega) = 1$. Dans ce cas, le capital $X_{n-1}(\omega)$ est augmenté de 50%, donc

$$Z_n(\omega) = \frac{1,5 \times X_{n-1}(\omega)}{X_{n-1}(\omega)} = 1,5$$

D'autre part,

$$\left(1 + \frac{1}{2}Y_n(\omega)\right) \left(1 - \frac{2}{5}(1 - Y_n(\omega))\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1,5$$

Deuxième cas : $Y_n(\omega) = 0$. Dans ce cas, le capital $X_{n-1}(\omega)$ est diminué de 40%, donc

$$Z_n(\omega) = \frac{0,6 \times X_{n-1}(\omega)}{X_{n-1}(\omega)} = 0,6$$

D'autre part,

$$\left(1 + \frac{1}{2}Y_n(\omega)\right) \left(1 - \frac{2}{5}(1 - Y_n(\omega))\right) = \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{3}{5} = 0,6$$

On a bien montré que :

$$Z_n = \left(1 + \frac{1}{2}Y_n\right) \left(1 - \frac{2}{5}(1 - Y_n)\right)$$

Y_n est finie donc Z_n est finie et admet une espérance. La loi de Z_n est donnée par le tableau suivant :

$x \in Z_n(\Omega)$	0,6	1,5
$\mathbb{P}([Z_n = x])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Donc

$$\Delta = \mathbb{E}(Z_n) = 0,3 + 0,75 = 1,05$$

b) On remarque (par télescopage) que

$$\prod_{k=1}^n Z_k = \prod_{k=1}^n \frac{X_k}{X_{k-1}} = \frac{X_n}{X_0} = \frac{X_n}{m}$$

donc

$$X_n = m \prod_{k=1}^n Z_k$$

Or, les variables aléatoires Y_k sont mutuellement indépendantes (les lancers sont indépendants), donc les Z_k sont également mutuellement indépendantes par lemme des coalitions. La variable aléatoire X_n admet alors une espérance comme produit de variables aléatoires indépendantes admettant toutes une espérance et :

$$\mathbb{E}(X_n) = m \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(Z_k) = m\Delta^n$$

Puisque $m > 0$ et $\Delta > 1$, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = +\infty$$

Une espérance de gain gigantesque est alléchante, mais 100 lancers n'est pas un grand nombre (on sait que la convergence est lente via la loi faible des grands nombres) et on n'a à ce stade aucune idée de la variance de X_n . Néanmoins, il semblerait que le pari soit gagnant en moyenne.

3. a) Nous changeons les noms des variables pour les rendre plus transparents.

```

1 def un_pari(capital):
2     r = rd.random()
3     if r < 1/2:
4         return capital * 1.5
5     else:
6         return capital * 0.6

```

b) Nous changeons les noms des variables pour les rendre plus transparents.

```

1 def suite_pari(mise_depart, n):
2     liste_capital = [mise_depart]
3     for k in range(n):
4         liste_capital.append(un_pari(liste_capital[-1]))
5     return liste_capital

```

c) Nous changeons les noms des variables pour les rendre plus transparents.

```

1 def plusieurs_suites_pari(mise_depart, nb_pari, nb_joueurs):
2     M = np.zeros([nb_joueurs, nb_pari+1])
3     for i in range(nb_joueurs):
4         L = suite_pari(mise_depart, nb_pari)
5         for j in range(nb_pari+1):
6             M[i,j] = L[j]
7     return M

```

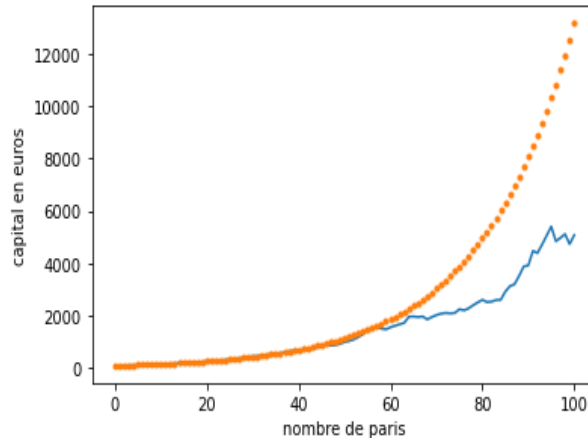
d) On considère la fonction mystere suivante :

```

1 def mystere(mise_depart, nb_pari, nb_joueurs):
2     M = plusieurs_suites_pari(mise_depart, nb_pari, nb_joueurs)
3     liste_temps = [k for k in range(nb_pari+1)]
4     liste_mystere_1 = [np.mean(M[:,j]) for j in liste_temps]
5     plt.plot(liste_temps, liste_mystere_1)
6     liste_mystere_2 = [mise_depart * (1.05 ** n) for n in liste_temps]
7     plt.plot(liste_temps, liste_mystere_2, '.')
8     plt.xlabel('nombre de paris')
9     plt.ylabel('capital en euros')
10    plt.show()

```

On reproduit ci-après la figure produite par l'appel `mystere(100, 100, 100000)`. Expliquer ce que représentent les deux courbes. Que remarque-t-on ?



- La courbe tracée en pointillée représente l'espérance théorique $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction du nombre n de paris effectués (n varie de 0 à 100).
- La courbe tracée en trait continu représente la simulation de la moyenne des capitaux de 100000 joueurs en fonction du nombre de paris

On remarque un décrochage de la moyenne empirique par rapport à la moyenne théorique à partir d'une soixantaine de paris. Il faudrait augmenter le nombre de joueurs simulés pour que ces deux courbes restent proches tout le long des 100 paris.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\ln(Z_n)$ est finie donc admet une espérance et

$$\theta = \mathbb{E}(\ln(Z_n)) = \frac{1}{2} \ln(1,5) + \frac{1}{2} \ln(0,6) = \ln\left(\sqrt{1,5 \times 0,6}\right) = \ln\left(\frac{9}{10}\right) < 0$$

b)

$$\begin{aligned} \ln(X_n) &= \ln\left(m \prod_{k=1}^n Z_k\right) \\ &= \ln(m) + \sum_{k=1}^n \ln(Z_k) \end{aligned}$$

$\ln(X_n)$ admet une espérance comme somme de variables aléatoires qui admettent chacune une espérance. Par linéarité :

$$\mathbb{E}(\ln(X_n)) = \ln(m) + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\ln(Z_k)) = \ln(m) + n\theta$$

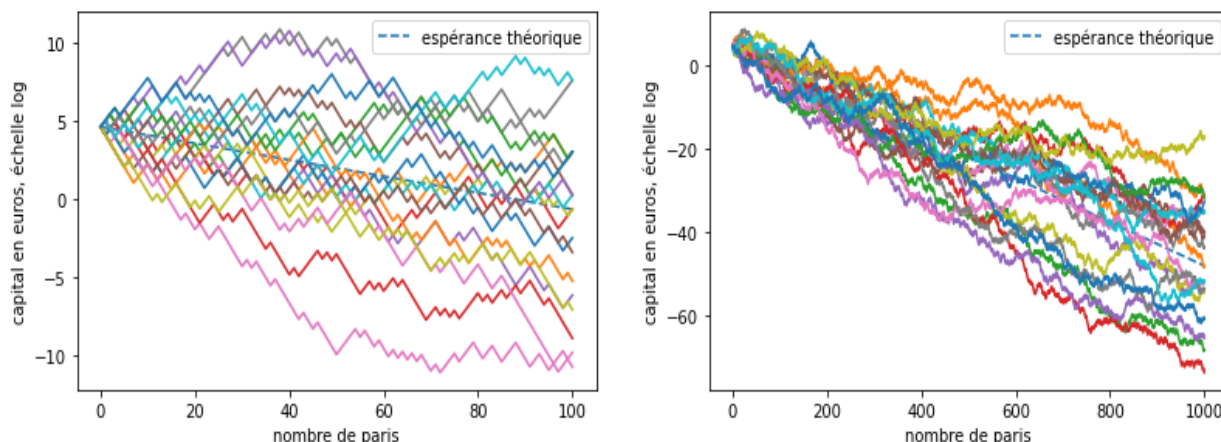
c) Nous changeons les noms des variables pour les rendre plus transparents.

```

1 def evolution_joueurs(mise_depart, nb_paris, nb_joueurs):
2     M = plusieurs_suites_paris(mise_depart, nb_paris, nb_joueurs)
3     temps = [k for k in range(nb_paris+1)]
4     theta = np.log(np.sqrt(1.5 * 0.6))
5     esp_theorique = [np.log(mise_depart) + n * theta for n in temps]
6     plt.plot(temps, esp_theorique, '-.', label='espérance théorique')
7     for i in range(nb_joueurs):
8         plt.plot(temps, np.log(M[i,:]))
9     plt.legend(loc='best') # Facultatif.
10    plt.xlabel('nombre de paris') # Facultatif.
11    plt.ylabel('capital en euros, échelle log') # Facultatif.
12    plt.show()

```

- d) On reproduit ci-dessous les graphiques obtenus par les appels de `evolution_joueurs(100, 100, 20)` et `evolution_joueurs(100, 1000, 20)`.



Quelle conjecture peut-on faire sur le capital d'un joueur après un grand nombre de paris d'après ces graphiques ?

Le capital d'un joueur semble diminuer sur le temps long.

- e) Sur une période de deux paris consécutifs dont l'un est gagnant et l'autre est perdant, le capital c se transforme pour devenir $c \times 1,5 \times 0,6 = \frac{9}{10}c$. Ainsi, le capital diminue dans cette configuration. Lorsque un joueur effectue un très grand nombre de paris, la loi faible des grands nombres assure qu'environ la moitié de ces paris donne **Pile** et l'autre donne **Face**. Puisque le produit est commutatif, tout se passe comme si le joueur enchaînait les périodes de deux paris consécutifs dont l'un est gagnant et l'autre est perdant. Au cours de $2n$ paris dont n sont gagnants et n sont perdants, le capital initial m devient $m \left(\frac{9}{10}\right)^n$. Puisque $0 < \frac{9}{10} < 1$, il est probable que le capital tend vers 0 lorsque le nombre de paris tend vers $+\infty$.

5. La stratégie initiale consiste à investir tout son capital dans les paris successifs. On souhaite changer cette stratégie en n'investissant qu'une fraction $x \in]0, 1[$ du capital possédé. On se demande quelle fraction est optimale.

- a) Avec cette nouvelle stratégie, la formule pour θ devient :

$$\theta = \ln \left(\sqrt{(1 + 0,5x)(1 - 0,4x)} \right) = \ln \left(\sqrt{f(x)} \right)$$

D'où

$$\mathbb{E}(\ln(X_n)) = \ln(m) + n \ln \left(\sqrt{f(x)} \right)$$

f est à valeurs positives et les fonctions \ln et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont croissantes sur \mathbb{R}^+ donc $\mathbb{E}(\ln(X_n))$ atteint son (ou ses) maximum au même point que f .

- b) f admet un unique maximum atteint en $x_0 = \frac{1}{4}$. En choisissant cette fraction x_0 de capital investi à chaque pari, on risque à chaque pari 10% du capital (on perd la fraction $\frac{1}{4} \times \frac{2}{5}$ du capital en cas d'échec).