

## Planches HEC

### Sujet Maths appliquées 2

#### Exercice avec préparation 1

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  et suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose  $T = \max(X, Y)$  et  $W = \frac{1}{T}$ .

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de la variable aléatoire  $W$ .

1. Cours : donner la définition d'une variable à densité.
2. On suppose que le module **Python** `numpy.random` a été importé sous l'alias `rd`. Justifier que la fonction **Python** écrite ci-dessous permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

```
def expo():
    return -log(rd.random())
```

3. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire  $T$ .  
Démontrer alors que  $T$  admet une densité, et en déterminer une.
4. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \varphi(t) = 2 \times \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$$

Montrer que  $\varphi$  se prolonge par une fonction continue en 0.

On notera encore  $\varphi$  le prolongement obtenu et ainsi  $\varphi$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

5. a) Démontrer que la variable aléatoire  $W$  admet une espérance si et seulement si l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$  converge.  
b) En déduire que  $W$  admet une espérance.
6. On admet alors que  $\mathbb{E}(W) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$  et on souhaite calculer  $\mathbb{E}(W)$ .

- a) Démontrer que : pour tout  $x > 0$ , les intégrales  $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt$  et  $\int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  convergent et

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt = \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

- b) En déduire la valeur de  $\mathbb{E}(W)$ .

#### Exercice sans préparation 1

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 - A = I_n$ .

Déterminer, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , une expression de  $A^p$  en fonction de  $A$ ,  $I_n$  et  $p$ .

**Réponses de l'exercice avec préparation 1 :**

1. Soit  $X$  une variable aléatoire. On dit que  $X$  est une variable à densité si sa fonction de répartition  $F_X$  est :

× continue sur  $\mathbb{R}$  ;

× de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en un nombre fini de points.

2. Considérons une variable aléatoire  $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1])$  simulée par la commande **Python** `rd.random()`. Posons  $Z = -\ln(U)$ .

On a :  $Z(\Omega) = [0, +\infty[$ .

Soit  $x \geq 0$ .

$$\begin{aligned}
 F_Z(x) &= \mathbb{P}(Z \leq x) \\
 &= \mathbb{P}(-\ln(U) \leq x) \\
 &= \mathbb{P}(\ln(U) \geq -x) \\
 &= \mathbb{P}(U \geq e^{-x}) && \text{(car exp est strictement croissante sur } \mathbb{R} \text{)} \\
 &= 1 - \mathbb{P}(U < e^{-x}) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(U \leq e^{-x}) && \text{(car } U \text{ est à densité)} \\
 &= 1 - F_U(e^{-x}) \\
 &= 1 - e^{-x} && \text{(car } e^{-x} \in ]0, 1])
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$F_Z : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Or, la fonction de répartition caractérise la loi.

La fonction **Python** permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

3. Tout d'abord :  $T(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $x > 0$ .

$$\begin{aligned}
 F_T(x) &= \mathbb{P}(T \leq x) \\
 &= \mathbb{P}(\max(X, Y) \leq x) \\
 &= \mathbb{P}([X \leq x] \cap [Y \leq x]) \\
 &= \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq x) && \text{(par indépendance)} \\
 &= F_X(x)^2 && \text{(car } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi)} \\
 &= (1 - e^{-x})^2 && \text{(car } x > 0 \text{)}
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$F_T : x \mapsto \begin{cases} (1 - e^{-x})^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction  $F_T$  est :

- × de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en 0 ;
- × continue en 0.

On peut conclure que  $T$  admet une densité.

Pour déterminer une densité de  $T$ , on dérive sa fonction de répartition sur les intervalles ouverts où elle est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Pour tout  $x > 0$  :

$$F_T'(x) = 2e^{-x}(1 - e^{-x}) = 2(e^{-x} - e^{-2x})$$

Pour tout  $x < 0$  :

$$F_T'(x) = 0$$

La fonction  $f_T : x \mapsto \begin{cases} 2(e^{-x} - e^{-2x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est une densité de  $T$ .

### Commentaire

On a choisi (arbitrairement) la valeur 0 en 0.

4. On a le DL usuel :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o_{u \rightarrow 0}(u^2)$$

D'où :

$$\begin{aligned} e^{-t} - e^{-2t} &= 1 + (-t) + \frac{(-t)^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}((-t)^2) - \left( 1 + (-2t) + \frac{(-2t)^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}((-2t)^2) \right) \\ &= 1 - t + \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2) - \left( 1 - 2t + \frac{4t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \right) \\ &= t - \frac{3t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \end{aligned}$$

Ce DL permet d'obtenir l'équivalent :

$$e^{-t} - e^{-2t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$$

et donc :

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{2t}{t} = 2$$

La fonction  $\varphi$  admet un prolongement par continuité en 0 en posant  $\varphi(0) = 2$ .

**Commentaire**

Autre méthode :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 2 \times \frac{(e^{-t} - 1) - (e^{-2t} - 1)}{t} \\ &= 2 \times \frac{e^{-t} - 1}{t} - 2 \times \frac{e^{-2t} - 1}{t} \\ &= -2 \times \frac{e^{-t} - 1}{-t} + 4 \times \frac{e^{-2t} - 1}{-2t} \end{aligned}$$

Puis on utilise la limite usuelle  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

**Commentaire**

Autre méthode :

$$\varphi(t) = 2 \times e^{-t} \frac{1 - e^{-t}}{t}$$

et

$$\frac{1 - e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-(-t)}{t} = 1$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(t) = 2$ .

5. a) On souhaite utiliser le théorème de transfert en voyant  $W$  comme une transformée de  $T$ .

Récapitulons les hypothèses à vérifier :

- ×  $W = g(T)$  où  $g : x \mapsto \frac{1}{x}$  ;
- ×  $T$  admet une densité, notée  $f_T$ , qui est nulle en dehors de  $]0, +\infty[$  ( $T(\Omega) = ]0, +\infty[$ ) ;
- × la fonction  $g$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

Ainsi, d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W) \text{ existe} &\iff \int_0^{+\infty} g(t)f_T(t)dt \text{ converge absolument} \\ &\iff \int_0^{+\infty} g(t)f_T(t)dt \text{ converge} && \text{(car } g \text{ et } f_T \text{ sont positives sur } ]0, +\infty[) \\ &\iff \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} 2(e^{-t} - e^{-2t})dt \text{ converge} \\ &\iff \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt \text{ converge} \end{aligned}$$

b) La fonction  $\varphi$  est continue sur  $[0, +\infty[$  donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$  est impropre en  $+\infty$ .

De plus :

$$t^2 \varphi(t) = 2te^{-t} - 2te^{-2t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (\text{par croissances comparées})$$

donc  $\varphi(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ .

Puisque l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge par critère de Riemann, il suit par critère de comparaison que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$  converge également.

D'après la question précédente, on peut conclure que  $W$  admet une espérance.

**6. a)** Soit  $x > 0$ .

On démontre que les intégrales  $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt$  et  $\int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  convergent de manière analogue à la question précédente (on compare avec  $\frac{1}{t^2}$  en  $+\infty$ ).

Le changement de variable affine  $2t = u$  donne :

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt &= \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\frac{u}{2}} \frac{1}{2} du \\ &= \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \\ &= \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \end{aligned} \quad (\text{variable muette})$$

**b)** Soit  $x > 0$ .

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt &= \int_x^{+\infty} 2 \times \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt \\ &= 2 \left( \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt \right) && (\text{par linéarité}) \\ &= 2 \left( \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) && (\text{d'après la question 6.a}) \\ &= 2 \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt && (\text{d'après la relation de Chasles}) \end{aligned}$$

Conjecture

Il s'agit de calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$ .

Il y a deux difficultés :

- i. L'énoncé ne nous donne pas le résultat, il faut donc le deviner. Une fois que l'on aura un candidat sérieux pour la limite, il sera plus facile de faire le calcul.
- ii. On ne connaît pas de primitive de  $\frac{e^{-t}}{t}$  et une intégration par parties n'améliorera pas la situation. Il ne faut donc pas tenter de calculer exactement cette intégrale.

Procédons à une heuristique (un raisonnement qui n'est pas rigoureux par endroits, mais qui est soutenu par une intuition raisonnable et qui a donc des chances d'amener à la bonne réponse).

On cherche une limite lorsque  $x$  tend vers 0. Dans ce contexte, les deux bornes de l'intégrale tendent vers 0. Ainsi, seul le comportement de l'intégrande au voisinage de 0 nous importe. On peut donc utiliser un développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle pour capter l'information importante :

$$\frac{e^{-t}}{t} = \frac{1 - t + o_{t \rightarrow 0}(t)}{t} = \frac{1}{t} - 1 + o_{t \rightarrow 0}(1)$$

On intègre ce développement asymptotique de l'intégrande (c'est cette étape qui ne peut pas être justifiée tel quel avec les outils du programme d'ECG maths appliquées) :

$$\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt - \int_x^{2x} 1 dt + \int_x^{2x} o_{t \rightarrow 0}(1) dt = \ln(2) - x + o_{x \rightarrow 0}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln(2)$$

Démontrons maintenant rigoureusement que :

$$\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln(2)$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln(2) &= \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt \end{aligned}$$

De plus, par convexité de  $\exp$  sur  $\mathbb{R}$ , on a, pour tout  $t \in [x, 2x]$  :

$$1 \geq e^{-t} \geq 1 - t$$

et donc :

$$0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$$

ce qui donne :

$$|e^{-t} - 1| \leq t$$

Par inégalité triangulaire, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant ( $x \leq 2x$ ) :

$$\begin{aligned} \left| \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln(2) \right| &= \left| \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt \right| \\ &\leq \int_x^{2x} \frac{|e^{-t} - 1|}{t} dt \\ &\leq \int_x^{2x} \frac{t}{t} dt \\ &= \int_x^{2x} 1 dt \\ &= x \end{aligned}$$

Par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln(2) \right| = 0$$

Autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt = \ln(2)$$

On peut alors conclure que :  $\mathbb{E}(W) = 2 \ln(2)$ .

#### Commentaire

En analyse, lorsque l'on veut démontrer que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  et que le calcul est non trivial, il faut avoir le réflexe de majorer  $|f(x) - \ell|$  par une quantité qui tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ . Cette démarche est justifiée par le théorème d'encadrement.

#### Commentaire

Une autre méthode plus directe était possible pour faire ce calcul de limite. Pour tout  $t \in [x, 2x]$ , on a  $e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$  et donc :

$$e^{-2x} \ln(2) = \int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t} dt = e^{-x} \ln(2)$$

puis on applique le théorème d'encadrement. La difficulté ici est de deviner qu'il faut encadrer l'exponentielle pour obtenir le résultat.

**Réponses de l'exercice sans préparation 1 :**

- L'hypothèse faite sur  $A$  se traduit de la manière suivante : le polynôme  $P(x) = x^2 - x - 1$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

D'après le théorème de division euclidienne, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe deux polynômes  $Q_p$  (le quotient) et  $R_p$  (le reste) vérifiant :

$$x^p = Q_p(x)P(x) + R_p(x) \quad (*)$$

avec  $\deg(R_p) < \deg(P) = 2$ .

Ainsi, il existe deux réels  $a_p$  et  $b_p$  tels que  $R_p(x) = a_px + b_p$ .

Puisque  $P(x)$  est un polynôme annulateur de  $A$ , il vient :

$$A^p = R_p(A) = a_pA + b_pI_n$$

- Calculons maintenant  $a_p$  et  $b_p$ . Pour cela, il faut connaître les racines du polynôme  $P$ . Son discriminant vaut  $\Delta = 1 + 4 = 5$  et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

En évaluant (\*) en  $x_1$  et  $x_2$  successivement, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}a_p + b_p = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^p \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}a_p + b_p = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^p \end{cases}$$

L'opération  $L_1 - L_2$  donne :

$$\sqrt{5}a_p = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^p - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^p$$

donc

$$a_p = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^p - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^p}{\sqrt{5}}$$

Réécrivons le système sous la forme :

$$\begin{cases} a_p + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}b_p = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{p-1} \\ a_p + \frac{2}{1 - \sqrt{5}}b_p = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{p-1} \end{cases}$$

L'opération  $L_1 - L_2$  donne :

$$\sqrt{5}b_p = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{p-1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{p-1}$$

donc

$$b_p = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{p-1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{p-1}}{\sqrt{5}}$$

**Commentaire**

On peut aussi procéder par récurrence plutôt que de faire une division euclidienne.