

Planches HEC

Sujet Maths appliquées 1

Exercice avec préparation 1

On considère une pièce qui fait Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec probabilité $q = 1 - p$.

Soit n un entier non nul fixé.

On considère n joueurs qui lancent chacun la pièce jusqu'à obtenir Pile. Le ou les gagnants sont désignés comme ceux qui ont fait le moins de lancers.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit X_i le nombre de lancers du i -ième joueur, et on note N le nombre de gagnants.

1. Cours : combien y a-t-il de sous ensembles à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ lorsque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$?
2. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donner la loi de X_i , son espérance et sa variance.
3. Calculer pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_i > j)$.
4. On note $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
5. a) Écrire une fonction **Python** `nombre_min(L)` prenant en argument une liste `L` et renvoyant le nombre de fois où la valeur minimale apparaît dans la liste `L`.
 b) En déduire une fonction **Python** `simulN(n,p)` qui, prenant en argument la valeur de n et p , simule l'expérience aléatoire décrite et renvoie la valeur de N .
6. a) Calculer $\mathbb{P}(N = n)$.
 b) Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(N = k) = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{1 - q^n}$$

7. En déduire l'espérance de N et la variance de N .

Exercice sans préparation 1

Soient f une fonction continue positive décroissante sur \mathbb{R}^+ et $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ soit divergente.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

On suppose que $\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer que la série $\sum u_n f(S_n)$ converge.

Etudier la réciproque.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Il y a $\binom{n}{k}$ sous ensembles à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ lorsque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

2. L'expérience (pour le joueur numéro i) consiste en une répétition infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p (le succès étant « la pièce tombe sur Pile »).

La variable aléatoire X_i est égale au rang du premier succès.

Ainsi : $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$.

3. Soient $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i > j) &= \sum_{k=j+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_i = k) \\ &= \sum_{k=j+1}^{+\infty} pq^{k-1} \\ &= pq^j \sum_{k=0}^{+\infty} q^k && \text{(décalage d'indice)} \\ &= \cancel{pq^j} \frac{1}{\cancel{1-q}} && \text{(somme géométrique de raison } q \in]-1, 1[) \\ &= q^j \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_i > j) = q^j$.

4. Tout d'abord, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $j \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y > j) &= \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > j) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i > j]\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > j) && \text{(par indépendance)} \\ &= \prod_{i=1}^n q^j && \text{(d'après la question 3)} \\ &= (q^j)^n \\ &= (q^n)^j \end{aligned}$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y > k - 1) - \mathbb{P}(Y > k) = (q^n)^{k-1} - (q^n)^k = (1 - q^n)(q^n)^{k-1}$$

On peut conclure que : $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q^n)$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1 - q^n}$ et $\mathbb{V}(Y) = \frac{q^n}{(1 - q^n)^2}$.

Commentaire

On a utilisé dans cette preuve une caractérisation de la loi géométrique via la fonction de survie $k \mapsto \mathbb{P}(Y > k)$. C'est un exercice classique d'ECG en voie maths appliquée.

On pouvait également procéder via une expérience de référence. En effet :

- L'expérience aléatoire peut être vue comme une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $1 - q^n$ (il suffit pour cela de choisir comme succès « au moins un des joueurs tombe sur Pile » et la formule vient du calcul de la probabilité d'avoir un échec, qui utilise l'indépendance des lancers);
- La variable aléatoire Y est égale au rang du premier succès.

5. a) On utilise la fonction `min` pour stocker dans une variable `m` la valeur minimale de la liste `L`.

```

1 def nombre_min(L):
2     m = min(L)
3     compteur = 0
4     for k in range(len(L)): # On parcourt la liste L
5         if L[k] == m: # Si la valeur actuelle est la valeur minimale
6             compteur += 1
7     return compteur

```

b) On commence par créer une liste `L` contenant les nombres de lancers de tous les joueurs.

```

1 def simulN(n,p):
2     L = [rd.geometric(p) for k in range(n)]
3     return nombre_min(L)

```

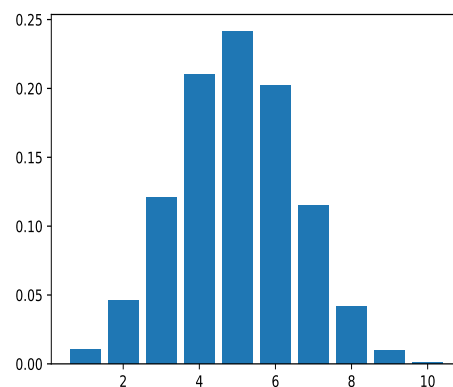
Commentaire

A l'aide de cette fonction **Python**, nous pouvons tracer un diagramme en barre représentant la loi de N . On simule pour cela un grand nombre K de fois la variable aléatoire N et on compte combien de fois chaque valeur de N est prise. On renormalise en divisant tous ces nombres par K .

```

1 n = 10
2 p = 1/2
3 K = 10**4
4 liste_obs = [0 for k in range(n)]
5 for k in range(K):
6     liste_obs[simulN(n,p) - 1] += 1
7 for i in range(n):
8     liste_obs[i] = liste_obs[i] / K
9 plt.bar(np.arange(1,11), liste_obs)
10 plt.show()

```



6. a) Tout d'abord, remarquons que $N(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et :

- $[N = n]$ est réalisé \iff il y a n gagnants
- \iff tous les joueurs sont gagnants
- \iff tous les joueurs ont lancé autant de fois la pièce avant de tomber sur Pile
- $\iff [X_1 = X_2 = \dots = X_n]$ est réalisé
- $\iff \bigcap_{i=2}^n [X_i = X_1]$ est réalisé

On applique ensuite la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_1 :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{i=2}^n [X_i = X_1] \right) \cap [X_1 = k] \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = k] \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = k) && \text{(par indépendance)} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^n pq^{k-1} && \text{(car } X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p)) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} (pq^{k-1})^n \\
 &= p^n \sum_{k=0}^{+\infty} (q^n)^k \\
 &= \frac{p^n}{1 - q^n} && \text{(somme géométrique de raison } q^n \in] - 1, 1[)
 \end{aligned}$$

Commentaire

Il faut tout de suite remarquer que cette formule est cohérente avec celle donnée à la question suivante.

b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à la variable aléatoire Y :

$$\mathbb{P}(N = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k] \cap [Y = j])$$

Notons A_k l'ensemble des parties à k éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On remarque alors que :

- $[N = k] \cap [Y = j]$ est réalisé \iff k variables aléatoires parmi X_1, \dots, X_n prennent la valeur j et les autres prennent une valeur strictement supérieure à j
- $\iff \bigcup_{I \in A_k} \left(\left(\bigcap_{i \in I} [X_i = j] \right) \cap \left(\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} [X_i > j] \right) \right)$ est réalisé

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N = k) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{I \in A_k} \left(\left(\bigcap_{i \in I} [X_i = j] \right) \cap \left(\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} [X_i > j] \right) \right) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{I \in A_k} \mathbb{P} \left(\left(\bigcap_{i \in I} [X_i = j] \right) \cap \left(\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} [X_i > j] \right) \right) && \text{(par incompatibilité)} \\
 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{I \in A_k} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = j) \times \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} \mathbb{P}(X_i > j) \right) && \text{(par indépendance)} \\
 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{I \in A_k} \left(\prod_{i \in I} pq^{j-1} \times \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} \mathbb{P}(X_i > j) \right) && \text{(car } X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p)) \\
 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{I \in A_k} \left(\prod_{i \in I} pq^{j-1} \times \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} q^j \right) && \text{(d'après la question 3)} \\
 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{I \in A_k} \left((pq^{j-1})^k \times (q^j)^{n-k} \right) && \text{(car Card}(I) = k) \\
 &= \sum_{j=1}^{+\infty} \binom{n}{k} (pq^{j-1})^k (q^j)^{n-k} && \text{(car Card}(A_k) = \binom{n}{k}) \\
 &= \binom{n}{k} p^k \sum_{j=1}^{+\infty} q^{k \cancel{j} - k + n \cancel{j} - k \cancel{j}} \\
 &= \binom{n}{k} p^k q^{-k} \sum_{j=1}^{+\infty} q^{nj} \\
 &= \binom{n}{k} p^k q^{-k} \sum_{j=0}^{+\infty} q^{n(j+1)} && \text{(décalage d'indice)} \\
 &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sum_{j=0}^{+\infty} (q^n)^j \\
 &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{1}{1 - q^n}
 \end{aligned}$$

On a bien : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(N = k) = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{1 - q^n}$.

7. La formule obtenue à la question précédente fait penser à la loi binomiale de paramètres n et p . Nous allons utiliser la méthode des moments pour faire les calculs demandés.

Soit $W \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ de telle sorte que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(N = k) = \frac{\mathbb{P}(W = k)}{1 - q^n}$$

- Tout d'abord, N admet une espérance et une variance en tant que variable aléatoire finie.

- Calcul de l'espérance :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(N) &= \sum_{k=1}^n k\mathbb{P}(N = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(N = k) && \text{(on ajoute un terme nul)} \\
 &= \sum_{k=0}^n k \frac{\mathbb{P}(W = k)}{1 - q^n} \\
 &= \frac{1}{1 - q^n} \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(W = k) \\
 &= \frac{1}{1 - q^n} \mathbb{E}(W) \\
 &= \frac{np}{1 - q^n}
 \end{aligned}$$

- Calcul du moment d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(N^2) &= \sum_{k=1}^n k^2\mathbb{P}(N = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n k^2\mathbb{P}(N = k) && \text{(on ajoute un terme nul)} \\
 &= \sum_{k=0}^n k^2 \frac{\mathbb{P}(W = k)}{1 - q^n} \\
 &= \frac{1}{1 - q^n} \sum_{k=0}^n k^2\mathbb{P}(W = k) \\
 &= \frac{1}{1 - q^n} \mathbb{E}(W^2) \\
 &= \frac{\mathbb{V}(W) + \mathbb{E}(W)^2}{1 - q^n} && \text{(formule de Koenig-Huygens)} \\
 &= \frac{npq + (np)^2}{1 - q^n} && \text{(formule de Koenig-Huygens)}
 \end{aligned}$$

- Calcul de la variance :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V}(N) &= \mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(N)^2 \\
 &= \frac{npq + (np)^2}{1 - q^n} - \left(\frac{np}{1 - q^n} \right)^2 \\
 &= \frac{npq - npq^{n+1} - n^2p^2q^n}{(1 - q^n)^2} \\
 &= \frac{npq(1 - q^n - npq^{n-1})}{(1 - q^n)^2}
 \end{aligned}$$

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

- Etudions le sens direct. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Posons $S_{-1} = 0$ par convention (c'est une somme vide). Remarquons que la suite $(S_n)_{n \geq -1}$ est croissante puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $t \in [S_{k-1}, S_k]$. Par décroissance de f sur \mathbb{R}^+ , on a :

$$f(S_k) \leq f(t) \leq f(S_{k-1})$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant ($S_{k-1} \leq S_k$) :

$$\int_{S_{k-1}}^{S_k} f(S_k)dt \leq \int_{S_{k-1}}^{S_k} f(t)dt \leq \int_{S_{k-1}}^{S_k} f(S_{k-1})dt$$

d'où :

$$u_k f(S_k) \leq \int_{S_{k-1}}^{S_k} f(t)dt \leq u_k f(S_{k-1})$$

puisque $S_k - S_{k-1} = u_k$.

D'après la relation de Chasles, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \int_{S_{k-1}}^{S_k} f(t)dt = \int_0^{S_n} f(t)dt$$

Or, la série $\sum u_n$ diverge donc $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$. On en déduit que :

$$\sum_{k=0}^n \int_{S_{k-1}}^{S_k} f(t)dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)dt$$

puisque $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Ainsi :

× pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_k f(S_k) \leq \int_{S_{k-1}}^{S_k} f(t)dt$ (car f est positive) ;

× la série $\sum \int_{S_{k-1}}^{S_k} f(t)dt$ converge.

Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on peut conclure que la série $\sum u_n f(S_n)$ converge.

- Etudions la réciproque. On suppose que la série $\sum u_n f(S_n)$ converge. On se demande si cela implique nécessairement la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$. Si c'est le cas, il faut en faire la démonstration. Sinon, il faut expliciter un contre-exemple.

La première chose à remarquer est que la preuve précédente ne peut pas être utilisée pour démontrer la réciproque. En effet, l'inégalité obtenue :

$$\int_{S_{k-1}}^{S_k} f(t)dt \leq u_k f(S_{k-1})$$

ne permet pas de conclure puisque il y a un décalage d'indice à droite entre u_k et $f(S_{k-1})$.

Après avoir fait cette remarque, on peut essayer d'affiner notre compréhension de la fonction f .

On sait que f est positive et décroissante, ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe et est finie. Notons ℓ cette limite.

Puisque $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, on en déduit que $f(S_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ puis que $u_n f(S_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell u_n$ si $\ell \neq 0$. Ceci serait absurde puisque la série $\sum u_n$ diverge tandis que la série $\sum u_n f(S_n)$ converge.

On peut conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Cette propriété ne permet pas de conclure que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, puisque le cours sur les intégrales de Riemann nous fournit un contre exemple : la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ tend vers 0 en $+\infty$ mais l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}dt$ diverge par critère de Riemann.

Puisque nous avons du mal à démontrer que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, nous allons essayer de construire un contre exemple.

L'intuition qui nous guide est la suivante : pour que la série $\sum u_n f(S_n)$ converge, il faut que le terme $f(S_n)$ tende suffisamment vite vers 0 (on sait que u_n ne tend pas vers 0 ou tend lentement vers 0 puisque la série $\sum u_n$ diverge). Pour cela, il faut que S_n tende suffisamment vite vers $+\infty$ (puisque l'on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$). La meilleure manière d'avoir une somme S_n qui croît très vite, c'est de prendre une suite (u_n) qui croît également très vite et qui tend vers $+\infty$.

× **Essai numéro 1** avec $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $u_n = n$:

Pour ce premier essai, la suite (u_n) ne tend pas très vite vers $+\infty$ par rapport à d'autres suites que l'on connaît, mais les calculs vont être faciles.

On a $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $f(S_n) = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2} + 1} = \frac{2}{n(n+1) + 2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$.

Commentaire

On a $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc on aura toujours $f(S_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$ dans les exemples utilisant cette fonction.

On en déduit que $u_n f(S_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ et donc la série $\sum u_n f(S_n)$ diverge.

Cet exemple ne convient pas puisque il ne vérifie pas l'hypothèse voulue.

× **Essai numéro 2** avec $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $u_n = e^n$:

Pour ce deuxième essai, la suite (u_n) tend très vite vers $+\infty$ par rapport à la suite précédente et les calculs sont encore faciles.

On a $S_n = \sum_{k=0}^n e^k = \frac{1 - e^{n+1}}{1 - e} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{n+1}}{e - 1}$ et $f(S_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e - 1}{e^{n+1}}$.

On en déduit que $u_n f(S_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e - 1}{e}$ et donc la série $\sum u_n f(S_n)$ diverge.

Cet exemple ne convient pas puisque il ne vérifie pas l'hypothèse voulue.

× **Essai numéro 3** avec $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $u_n = e^{n^2}$:

Pour ce troisième essai, la suite (u_n) tend encore plus vite vers $+\infty$ par rapport à la suite précédente mais les calculs deviennent plus compliqués car nous n'avons pas de formule pour S_n .

On a $S_n = \sum_{k=0}^n e^{k^2} = e^{n^2} + \sum_{k=0}^{n-1} e^{k^2}$. Puisque la suite (u_n) croît très vite, on peut avoir l'intuition que la somme des premiers termes de la suite est négligeable devant le terme suivant. En effet :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{k^2} \leq \sum_{k=0}^{n-1} e^{(n-1)^2} \leq n e^{(n-1)^2}$$

et donc :

$$0 \leq \frac{\sum_{k=0}^{n-1} e^{k^2}}{e^{n^2}} \leq \frac{ne^{(n-1)^2}}{e^{n^2}} = ne^{-2n+1}$$

Or $ne^{-2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissances comparées et donc, par théorème d'encadrement :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{k^2} = o_{n \rightarrow +\infty}(e^{n^2})$$

Finalement :

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{n^2} = u_n$$

On en déduit que $u_n f(S_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{S_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{u_n} = 1$ et donc la série $\sum u_n f(S_n)$ diverge.

Cet exemple ne convient pas puisque il ne vérifie pas l'hypothèse voulue.

On se rend compte à la lumière des exemples précédents que la fonction f choisie ne convient pas. En effet, lorsque (u_n) tend très vite vers $+\infty$, on a $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ et donc les termes u_n et $f(S_n)$ se compensent, ce qui empêche la série $\sum u_n f(S_n)$ de converger. Il faut donc choisir une fonction f qui tend plus vite vers 0 que la précédente, tout en s'assurant que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

On choisit $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)\ln(x+2)}$ qui tend légèrement plus vite vers 0 que la précédente. On aura alors :

$$u_n f(S_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{S_n \ln(S_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(S_n)}$$

Commentaire

Pour obtenir l'équivalent précédent, il faut connaître l'équivalent classique $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$. Ainsi, en utilisant deux fois cet équivalent :

$$\ln(x+2) = \ln((x+1)+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$$

On peut aussi reprendre la preuve usuelle :

$$\frac{\ln(x+2)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\ln(x)} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 1$$

On cherche donc une suite (u_n) telle que la série $\sum \frac{1}{\ln(S_n)}$ converge. Par critère de Riemann, on sait que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, ce qui nous amène à chercher une suite (u_n) telle que $\frac{1}{\ln(S_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Lemme technique

Pour simplifier les calculs, nous avons besoin du lemme suivant : si (u_n) et (v_n) sont deux suites strictement positives, qui ont pour limite $+\infty$ et qui sont équivalentes, alors $\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

Il s'agit d'un cas spécifique où la composition des équivalents est licite. Comme c'est faux en général, il faut le démontrer dans ce cas particulier, ce que l'on fait ci-dessous.

Démonstration. On sait que :

$$\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n) \iff \ln(u_n) - \ln(v_n) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(\ln(v_n))$$

Or :

$$\ln(u_n) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \ln(1) = 0$$

et $\ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$ donc :

$$\frac{\ln(u_n) - \ln(v_n)}{\ln(v_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

□

× **Essai numéro 4** avec $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)\ln(x+2)}$ et $u_n = e^{n^2}$:

Comme vu précédemment, on a $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

D'où :

$$\begin{aligned} u_n f(S_n) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{S_n \ln(S_n)} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(S_n)} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(u_n)} && \text{(d'après le lemme technique)} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

On a bien : $\sum u_n$ diverge et $\sum u_n f(S_n)$ converge.

Il reste à montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge. Or, pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{(t+1)\ln(t+2)} \\ &\geq \frac{1}{(t+2)\ln(t+2)} \\ &= \frac{u'(t)}{u(t)} && \text{(où } u : t \mapsto \ln(t+2)) \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_0^B \frac{1}{(t+2)\ln(t+2)} dt = [\ln(\ln(t+2))]_0^B \underset{B \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$$

et donc $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge par critère de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives.