Planches HEC

Sujet E 86

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Fonctions équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Pour tout entier naturel n, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-tx}\, dt$.

2. ***a)*** Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Étudier la suite $(f_n(0))_{n\geqslant 0}$. En déduire pour tout réel $x \geqslant 0$ fixé, la limite de la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$.

3. ***a)*** Soit x un réel strictement positif. Établir pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation :

$$f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x}\, f_n(x) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

b) Expliciter les fonctions f_0 et f_1.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $f_n(x)$ est équivalent à $\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. ***a)*** Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u$.

b) En déduire que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée f_n'.

c) Comparer pour tout réel $y \geqslant 0$, les deux réels y et $1 - \mathrm{e}^{-y}$.
En déduire que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est continue en 0.

Exercice sans préparation 1

Soient c et r deux réels strictement positifs.

1. Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{rc^r}{x^{r+1}} & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Identifier la loi de la variable aléatoire $Y = \ln(X) - \ln(c)$.

3. Compléter les lignes du code **Python** suivant pour que V soit un vecteur ligne contenant 100 réalisations de la loi de la variable aléatoire X.

```
c = float(input('c ='))
r = float(input('r ='))
U = ________________________________
V = __________________
print(V)
```

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Commentaire

On a également une écriture à l'aide de la relation de négligeabilité :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(g(x))$$

2. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $0 \leqslant x \leqslant y$. Soit $t \in [0,1]$. On a, par croissance de l'exponentielle :

$$t^n \mathrm{e}^{-tx} \geqslant t^n \mathrm{e}^{-ty}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$f_n(x) = \int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-tx}\, dt \geqslant \int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-ty}\, dt = f_n(y)$$

donc f_n est décroissante.

b)

$$f_n(0) = \int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Soit $x \geqslant 0$. On remarque que $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(0)$ par croissance de l'intégrale.
Par théorème d'encadrement :

$$f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. ***a)*** Soit x un réel strictement positif. Soit $n \geqslant 1$. On fait une IPP :

$$\left| \begin{array}{ll} u'(t) = \mathrm{e}^{-tx} & u(t) = -\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-tx} \\ v(t) = t^{n+1} & v'(t) = (n+1)t^n \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On obtient sans difficulté

$$f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} f_n(x) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

b) Pour tout $x > 0$: $f_0(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x}$ et $f_1(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$.

c) Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{n!}{x^{n+1}}$ »

Initialisation :
$f_0(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{0!}{x^{0+1}} = \dfrac{1}{x}$. D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{x^{n+2}}{(n+1)!}f_{n+1}(x) &= \frac{x^{n+2}}{(n+1)!}\frac{n+1}{x}\, f_n(x) - \frac{x^{n+2}}{(n+1)!}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \\ &= \frac{x^{n+1}}{n!}\, f_n(x) - \frac{x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence :

$$\frac{x^{n+1}}{n!}\, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et par croissance comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}}{(n+1)!} = 0$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

4. ***a)*** Le changement de variable affine $u = tx$ donne, pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

b) D'après le théorème fondamental de l'analyse, $u \mapsto u^n\mathrm{e}^{-u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x u^n\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par produit, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x > 0$.

$$f_n'(x) = -\frac{n+1}{x^{n+2}} \int_0^x u^n\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u + \frac{1}{x^{n+1}}x^n\mathrm{e}^{-x} = -\frac{n+1}{x}f_n(x) + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = -f_{n+1}(x)$$

c) Par convexité de la fonction exp, pour tout réel $y \geqslant 0$: $0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-y} \leqslant y$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}|f_n(0) - f_n(x)| &= \left|\int_0^1 t^n\, dt - \int_0^1 t^n\mathrm{e}^{-tx}\, dt\right| \\ &= \int_0^1 t^n(1-\mathrm{e}^{-tx})\, dt \\ &\leqslant x\int_0^1 t^{n+1}\, dt \\ &= \frac{x}{n+2}\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{n+2} = 0$$

Donc, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = f_n(0)$$

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en c, est positive sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{rc^r}{x^{r+1}}\,dx = 1$.

2. On a $X(\Omega) = [c, +\infty[$ et

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 1 - \left(\frac{c}{x}\right)^r & \text{si } x > c \\ 0 & \text{si } x \leqslant c \end{cases}$$

donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(r)$.
(X suit une loi de Pareto)

3. On propose le code suivant :

```
c = float(input('c ='))
r = float(input('r ='))
U = rd.exponential(1/r, 100)
V = c * np.exp(U)
print(V)
```

Sujet E 82

Exercice avec préparation 2

On suppose que toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : Loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$; définition, propriétés.

2. Pour tout x réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

a) Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, montrer que pour tout x réel, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

b) Établir pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'équivalence suivante : $\lfloor y \rfloor \leqslant x \Leftrightarrow y < \lfloor x \rfloor + 1$.

c) Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ et soit $N_n(\alpha, \beta)$ le nombre d'entiers k qui vérifient $\alpha < \dfrac{k}{n} \leqslant \beta$. Exprimer $N_n(\alpha, \beta)$ en fonction de $\lfloor n\alpha \rfloor$ et $\lfloor n\beta \rfloor$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Y_n la variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}\left(\left[Y_n = \frac{k}{n}\right]\right) = \frac{1}{n}.$$

Soit Z une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la variable aléatoire Z_n par : $Z_n = \dfrac{\lfloor nZ \rfloor}{n}$. Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.

a) Écrire une fonction **Python** `partieEntiere(x)` prenant en entrée un réel x positif et renvoyant sa partie entière inférieure. On n'utilisera pas la fonction `np.floor`.

b) Écrire une fonction **Python** `simulY(n)` (resp. `simulZ(n)`) prenant en entrée un entier $n \geqslant 1$ et simulant la variable aléatoire Y_n (resp. Z_n).

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([\alpha < Y_n \leqslant \beta]) = \beta - \alpha$.

d) Comparer les fonctions de répartition respectives de Y_n et Z_n. Conclusion.

Exercice sans préparation 2

Soit x réel et $M(x)$ la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $M(x) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2x & 2x \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de x la matrice $M(x)$ est-elle diagonalisable ?

Réponses de l'exercice avec préparation 2 :

1. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$ si la fonction

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant t \leqslant b \\ 0 & \text{si } t > b \end{cases}$$

est une densité de X. Sa fonction de répartition est dans ce cas :

$$F_X : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } a \leqslant t \leqslant b \\ 1 & \text{si } t > b \end{cases}$$

et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. Pour tout x réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier n non nul, on a : $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1$ donc $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$ donc $x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$. Par théorème d'encadrement :

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$$

b) Si $\lfloor y \rfloor \leqslant x$, alors $\lfloor y \rfloor < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $\lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor$ (car ce sont des entiers) et donc $y < \lfloor y \rfloor + 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$.

Si $y < \lfloor x \rfloor + 1$, alors $\lfloor y \rfloor < \lfloor x \rfloor + 1$ (car $\lfloor y \rfloor \leqslant y$) et donc $\lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

c) On remarque que, pour tout $x > 0$, le nombre d'entiers k vérifiant $0 < k \leqslant x$ est $\lfloor x \rfloor$.

Or,

$$\begin{aligned} \{k \in \mathbb{N} \mid \alpha < \frac{k}{n} \leqslant \beta\} &= \{k \in \mathbb{N} \mid n\alpha < k \leqslant n\beta\} \\ &= \{k \in \mathbb{N} \mid 0 < k \leqslant n\beta\} \setminus \{k \in \mathbb{N} \mid 0 < k \leqslant n\alpha\} \end{aligned}$$

En passant aux cardinaux, on en déduit que $N_n(\alpha, \beta) = \lfloor n\beta \rfloor - \lfloor n\alpha \rfloor$.

3. ***a)*** On propose la fonction **Python** suivante, utilisant la propriété : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

```
def partieEntiere(x):
    k = 0
    while k+1 <= x:
        k = k+1
    return k
```

b) On propose les fonctions **Python** suivantes :

```
def simulY(n):
    k = rd.randint(0,n)
    Y = k/n
    return Y
```

```
def simulZ(n):
    U = rd.random()
    Z = partieEntiere(n*U)/n
    return Z
```

c) On remarque que

$$[\alpha < Y_n \leqslant \beta] = \bigcup_{n\alpha < k \leqslant n\beta} \left[Y_n = \frac{k}{n}\right]$$

d'où

$$\mathbb{P}([\alpha < Y_n \leqslant \beta]) = \sum_{n\alpha<k\leqslant n\beta} \mathbb{P}\left(\left[Y_n = \frac{k}{n}\right]\right) = \sum_{n\alpha<k\leqslant n\beta} \frac{1}{n} = \frac{N(\alpha,\beta)}{n} = \frac{\lfloor n\beta\rfloor - \lfloor n\alpha\rfloor}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta-\alpha$$

d) D'une part :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\lfloor nx\rfloor}{n} + \frac{1}{n} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(pour la deuxième formule, on utilise $F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}([0 < Y_n \leqslant \beta]) + \mathbb{P}(Y_n = 0))$
D'autre part :

$$\begin{aligned}[Z_n \leqslant x] &= \left[\frac{\lfloor nZ\rfloor}{n} \leqslant x\right] = [\lfloor nZ\rfloor \leqslant nx] \\ &= [nZ \leqslant \lfloor nx\rfloor + 1] = \left[Z \leqslant \frac{\lfloor nx\rfloor}{n} + \frac{1}{n}\right]\end{aligned}$$

Or, si $x \in [0,1[$, alors $\frac{\lfloor nx\rfloor}{n} + \frac{1}{n} \in [0,1]$.
On en déduit que $F_{Y_n} = F_{Z_n}$ donc Y_n et Z_n ont même loi.

Réponses de l'exercice sans préparation 2 :
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lambda \text{ est valeur propre de } M(x) &\iff \det(M(x) - \lambda I_2) = 0 \\ &\iff (x-\lambda)(2x-\lambda) + 2x = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 3x\lambda + 2x(x+1)\end{aligned}$$

On note $\Delta(x) = (-3x)^2 - 8x(x+1) = x(x-8)$. Il y a alors trois cas à distinguer :

- Si $x \in]0,8[$, alors $\Delta(x) < 0$. La matrice $M(x)$ ne possède pas de valeurs propres et donc n'est pas diagonalisable.
- Si $x = 0$ ou $x = 8$, alors $\Delta(x) = 0$. La matrice $M(x)$ possède alors une unique valeur propre et donc n'est pas diagonalisable car n'est pas un multiple de l'identité (raisonnement par l'absurde classique).
- Si $x < 0$ ou $x > 8$, alors $\Delta(x) > 0$. La matrice $M(x)$ possède alors deux valeurs propres distinctes et donc est diagonalisable.

Sujet Maths appliquées 3

Exercice avec préparation 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres. Pour tout i de $1, 2, \ldots, n$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.
Pour tous i et k de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement : « l'urne i est choisie à la k^{e} épreuve ».

1. Question de cours : espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

2. ***a)*** Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(X_i = 1) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

b) Si $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

3. On pose $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{n}$ et en déduire un équivalent simple de $\mathbb{E}(Y_n)$ au voisinage de $+\infty$. Interpréter le résultat obtenu.

4. On considère le programme suivant :

```
import numpy.random as rd
def simulation(n):
    L = n*[n]
    X = n*[0]
    N = n*[0]
    for k in range(n):
        i = rd.randint(0,n)
        L[i] = L[i] - 1
    for j in range(n):
        N[j] = n - L[j]
        ..........
        ..........
    return (X,N)
```

a) Compléter le programme afin que X contienne les valeurs prises par les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ à la fin de l'expérience.

b) Que représente les variables aléatoires N_i renvoyées par cette fonction ?

c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

Exercice sans préparation 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}$ et soit y une solution de l'équation différentielle $y'' = f(y)$ sur $[-a, a]$ $(a > 0)$. On suppose que $y(-a) = y(a)$. Montrer que y est paire en étudiant l'intégrale

$$\int_{-a}^{a} \left(y'(t) + y'(-t)\right)^2 \, dt.$$

Réponses de l'exercice avec préparation 3 :

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. Si X et Y admettent une espérance, alors XY aussi et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

2. ***a)*** Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$$[X_i = 1] = \overline{\bigcup_{k=1}^{n} U_{i,k}} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}$$

$$\boxed{\text{D'où, par indépendance des tirages et par équiprobabilité : } \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.}$$

b) Fixons $i \neq j$ dans $\{1, 2, \dots, n\}$.

$$[X_i = 1] \cap [X_j = 1] = \overline{\bigcup_{k=1}^{n} U_{i,k} \cup U_{j,k}} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}}$$

D'où, par indépendance des tirages et par équiprobabilité :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \mathbb{P}([X_i = 1])\mathbb{P}([X_j = 1]) &\iff \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \\
&\iff 1 - \frac{2}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \\
&\iff \frac{n-2}{n} = \frac{(n-1)^2}{n^2} \\
&\iff n(n-2) = (n-1)^2 \\
&\iff 0 = 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X_i \text{ et } X_j \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.
Rappelons que, par définition, X et Y sont indépendantes si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x])\mathbb{P}([Y = y])$$

Dans le cas où X et Y suivent toutes les deux une loi de Bernoulli (comme c'est le cas dans cet exercice avec X_i et X_j), l'indépendance doit donc être vérifiée en principe pour tout couple $(x, y) \in \{0, 1\}^2$.
Cependant, on a la propriété de conservation de l'indépendance par passage à l'événement contraire. Plus précisément, si A et B sont deux événements, alors A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ sont indépendants.
Pour une variable de Bernoulli, on a :

$$\overline{[X = 1]} = [X = 0]$$

et donc, dans ce cas particulier, X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = 1])\mathbb{P}([Y = 1])$$

3. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$. La variable aléatoire Y_n admet une espérance comme somme de variables aléatoires admettant une espérance. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

D'où :

$$\frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

Or, $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$ donc $n\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = -1$.

$$\boxed{\text{Par continuité de l'exponentielle : } \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}} \text{ et } \mathbb{E}(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\mathrm{e}}.}$$

Interprétation : Y_n compte le nombre d'urnes dans lesquelles aucun tirage n'est effectué. Ainsi, lorsque n est très grand, environ $1/3$ des urnes restent pleines.

4. ***a)*** On complète de la manière suivante :

```
import numpy.random as rd
def simulation(n):
    L = n*[n]
    X = n*[0]
    N = n*[0]
    for k in range(n):
        i = rd.randint(0,n)
        L[i] = L[i] - 1
    for j in range(n):
        N[j] = n - L[j]
        if L[j] == n:
            X[j] = 1
    return (X,N)
```

b) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire N_i compte le nombre de boules manquantes dans l'urne i à la fin des n tirages, c'est-à-dire le nombre de fois où le tirage a été effectué dans l'urne i.

L'expérience consiste en une répétition finie de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de paramètre $p = \dfrac{1}{n}$ (le succès étant « le tirage est effectué dans l'urne i »). La variable aléatoire N_i est égale au nombre de succès.

$$\boxed{\text{Ainsi : } N_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right) \text{ et } \mathbb{E}(N_i) = 1.}$$

c) Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On remarque que $[X_i = 1] = [N_i = 0]$. Ainsi : $X_i N_i = 0$.

On en déduit que $\mathbb{E}(X_i N_i) = 0$. Or, $\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(N_i) = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \neq 0$.

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X_i \text{ et } N_i \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Réponses de l'exercice sans préparation 3 :

- La fonction y est deux fois dérivable sur $[-a, a]$ en tant que solution de l'équation différentielle $y'' = f(y)$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, il suit que y'' est continue sur $[-a, a]$ par composition et donc y' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$.
- Procédons par IPP en remarquant que :

$$\int_{-a}^{a} \big(y'(t) + y'(-t)\big)^2 \, dt = \int_{-a}^{a} \big(y'(t) + y'(-t)\big)\big(y'(t) + y'(-t)\big) \, dt$$

On pose :

$$\left| \begin{array}{ll} u'(t) = y'(t) + y'(-t) & u(t) = y(t) - y(-t) \\ v(t) = y'(t) + y'(-t) & v'(t) = y''(t) - y''(-t) \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$.

$$\int_{-a}^{a} \big(y'(t) + y'(-t)\big)^2 \, dt = \Big[\ (y(t) - y(-t))(y'(t) + y'(-t)) \ \Big]_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} (y(t) - y(-t))(y''(t) - y''(-t)) \, dt$$

(le crochet s'annule car $y(a) = y(-a)$)

$$= - \int_{-a}^{a} \big(y(t) - y(-t)\big)\big(f(y(t)) - f(y(-t))\big) \, dt$$

La fonction f étant croissante sur $\mathbb{R}$, le nombre $f(y(t)) - f(y(-t))$ a le même signe que le nombre $y(t) - y(-t)$. On en déduit que :

$$\forall t \in [-a, a], \ \big(y(t) - y(-t)\big)\big(f(y(t)) - f(y(-t))\big) \geqslant 0$$

Par positivité de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant, on a :

$$\int_{-a}^{a} \big(y'(t) + y'(-t)\big)^2 \, dt \leqslant 0$$

Or, pour tout $t \in [-a, a]$, $(y'(t) + y'(-t))^2 \geqslant 0$ et donc, à nouveau par positivité de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant, on a :

$$\int_{-a}^{a} \big(y'(t) + y'(-t)\big)^2 \, dt \geqslant 0$$

D'où :

$$\int_{-a}^{a} \big(y'(t) + y'(-t)\big)^2 \, dt = 0$$

Par continuité et positivité de l'intégrande, il vient :

$$\forall t \in [-a, a], \ \big(y'(t) + y'(-t)\big)^2 = 0$$

et donc

$$\forall t \in [-a, a], \ y'(t) + y'(-t) = 0$$

On pose $\varphi : t \mapsto y(t) - y(-t)$. D'après ce qui précède, la fonction φ est dérivable sur $[-a, a]$ et, pour tout $t \in [-a, a]$, $\varphi'(t) = 0$. Ainsi, la fonction φ est constante sur $[-a, a]$. De plus, $\varphi(a) = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in [-a, a], \ y(t) = y(-t). \text{ La fonction } y \text{ est paire.}}$$