Planches HEC

Sujet Maths appliquées 10

Exercice avec préparation 1
Soit n un entier naturel non nul.
On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $f(P) = Q$ où $Q : x \mapsto P''(x) - 4xP'(x)$.

1. Cours : $\mathbb{R}_n[x]$?

2. On décide de représenter le polynôme nul par la liste vide et tout polynôme non nul $x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ (où $a_k \neq 0$) par sa liste `a_0, ..., a_k` des coefficients dans l'ordre croissant des degrés.
Écrire en **Python** une fonction `f` qui, à partir de la liste `coeff_P` des coefficients d'un polynôme P renvoie la liste des coefficients du polynôme $f(P)$.

3. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ et déterminer sa matrice A dans la base canonique.

4. Montrer que A est diagonalisable. Quelle est la dimension de chacun de ses espaces propres ?

5. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que $f(P) = \lambda P$. Montrer que $\lambda = -4\deg(P)$.

6. En déduire qu'il existe un unique polynôme H_n de degré n et de coefficient dominant 1 tel que $f(H_n) = -4nH_n$ puis montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $f(H_n') = -4(n-1)H_n'$.

7. En déduire les formules suivantes :

$$\forall n \geqslant 1,\ H_n' = nH_{n-1} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) - xH_{n-1}(x) + \frac{n-1}{4}H_{n-2}(x) = 0$$

Exercice sans préparation 1
Soient $\lambda > 0$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toute la même loi de Poisson de paramètre λ. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{X_k}.$$

Soit $\alpha \in]0,1[$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un intervalle de confiance asymptotique de $\mathrm{e}^{-\lambda}$ au niveau $1-\alpha$ de la forme $[Y_n - \varepsilon, Y_n + \varepsilon]$, où ε est à déterminer en fonction de n et α.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. • L'ensemble $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel.

• L'opération de somme y est définie de la manière suivante.
Pour tous polynômes $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $Q(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i$:

$$(P+Q)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

• L'opération de multiplication par un scalaire y est définie de la manière suivante.
Pour tout polynôme $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda P)(x) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) x^i$$

• La dimension de $\mathbb{R}_n[x]$ vaut $n+1$.

• La base canonique de cet espace vectoriel est la famille $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

2. Commençons par calculer $f(P)(x)$, de sorte à avoir une formule pour les coefficients de ce polynôme en fonction des coefficients de P.
Notons $k \in [\![0, n]\!] \cup \{-\infty\}$ le degré de P.

Commentaire

Rappelons que $k = -\infty$ si et seulement si P est le polynôme nul et $k = 0$ si et seulement si P est un polynôme constant non nul.

• Premier cas : $k = 0$ ou $k = -\infty$.
Alors P est un polynôme constant et $f(P)$ est le polynôme nul.

• Deuxième cas : $k = 1$.
Alors $P(x) = a_0 + a_1 x$ où $a_1 \neq 0$. D'où :

$$f(P)(x) = 0 - 4x a_1 = -4 a_1 x$$

• Troisième cas : $k \geqslant 2$.
Alors $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i x^i$ où $a_k \neq 0$. D'où :

$$\begin{aligned}
f(P)(x) &= \sum_{i=2}^{k} i(i-1) a_i x^{i-2} - 4x \sum_{i=1}^{k} i a_i x^{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{k-2} (i+2)(i+1) a_{i+2} x^i - \sum_{i=1}^{k} 4 i a_i x^i \\
&= 2a_2 + \sum_{i=1}^{k-2} (i+2)(i+1) a_{i+2} x^i - \sum_{i=1}^{k-2} 4 i a_i x^i - 4(k-1) a_{k-1} x^{k-1} - 4k a_k x^k \\
&= 2a_2 + \sum_{i=1}^{k-2} \big((i+2)(i+1) a_{i+2} - 4 i a_i\big) x^i - 4(k-1) a_{k-1} x^{k-1} - 4k a_k x^k
\end{aligned}$$

On propose donc la fonction **Python** suivante :

```
def f(coeff_P):
    k = len(coeff_P) - 1
    # k = deg(P) (la liste coeff_P contient k+1 coefficients)
    if k == -1 or k == 0 : # si P est constant
        return []
    elif k == 1 : # si P est de degré 1
        return [0,-4*coeff_P[1]]
    else : # si P est de degré supérieur ou égal à 2
        liste = [2*coeff_P[2]]
        for i in range(1,k-1):
            liste.append((i+2)*(i+1)*coeff_P[i+2] - 4*i*coeff_P[i])
        liste.append(-4*(k-1)*coeff_P[k-1])
        liste.append(-4*k*coeff_P[k])
        return liste
```

3. La linéarité de f est une conséquence immédiate de la linéarité de la dérivation. De plus, f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[x]$ au vu de la formule obtenue à la question précédente.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x].}$$

Notons $(P_0, P_1, \dots, P_n) = (1, x, \dots, x^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

$$\begin{aligned} f(P_0) &= 0 \\ f(P_1) &= -4x = -4P_1 \\ \forall k \in [\![2, n]\!], f(P_k) &= k(k-1)x^{k-2} - 4xkx^{k-1} = k(k-1)P_{k-2} - 4kP_k \end{aligned}$$

La matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & & & (0) \\ & -4 & 0 & 6 & & & \\ & & -8 & 0 & \ddots & & \\ & & & -12 & \ddots & k(k-1) & \\ & & & & \ddots & 0 & \ddots \\ & & (0) & & & -4k & \ddots & n(n-1) \\ & & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & & -4n \end{pmatrix}$$

4. La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont exactements ses coefficients diagonaux. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{-4k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$$

La matrice A est de taille $(n+1) \times (n+1)$ et possède $n+1$ valeurs propres distinctes.

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est diagonalisable et tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.}}$$

5. Notons a le coefficient dominant de P, qui existe et est non nul car P n'est pas le polynôme nul. Le coefficient dominant de $f(P)$ est $-4a\deg(P)$ tandis que le coefficient dominant de λP est λa. Par identification, on a : $-4a\deg(P) = \lambda a$. Puisque a est non nul, on peut simplifier par a.

$$\boxed{\text{Finalement, on obtient bien : } \lambda = -4\deg(P).}$$

6. • Existence :
On sait que $-4n$ est valeur propre de A. Ainsi, il existe un vecteur colonne $U \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ qui soit un vecteur propre de A pour la valeur propre $-4n$. Notons P le polynôme associé à U dans la base canonique. Par isomorphisme de représentation matricielle, on a : $f(P) = -4nP$. D'après la question précédente, $-4n = -4\deg(P)$ et donc $\deg(P) = n$. En divisant P par son coefficient dominant (qui est non nul), on obtient un polynôme H_n de degré n, de coefficient dominant 1 et tel que $f(H_n) = -4nH_n$ (par linéarité de f).

• Unicité :
Soient P et Q deux polynômes de degré n, de coefficient dominant 1 et tels que $f(P) = -4nP$ et $f(Q) = -4nQ$. Notons U et V les vecteurs colonnes représentatifs de P et Q respectivement, dans la base canonique. Par isomorphisme de représentation matricielle, on a : $AU = -4nU$ et $AV = -4nV$. Donc U et V appartiennent au même sous-espace propre de A, qui est de dimension 1 d'après la question *4*. On en déduit que U et V sont colinéaires. Or, P et Q ayant pour coefficient dominant 1, il suit que U et V ont le même dernier coefficient (qui est égal à 1). On peut alors conclure que $U = V$.

• D'une part : $f(H_n) = -4nH_n$ et donc $f(H_n)' = -4nH_n'$.
D'autre part : $f(H_n) = H_n'' - 4xH_n'$ et donc

$$f(H_n)' = H_n^{(3)} - 4(H_n' + xH_n'') = H_n^{(3)} - 4xH_n'' - 4H_n' = f(H_n') - 4H_n'$$

En identifiant les deux formules, on obtient $f(H_n') - 4H_n' = -4nH_n'$ ce qui se réécrit sous la forme :

$$f(H_n') = -4(n-1)H_n'$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n le vecteur colonne représentatif de H_n dans la base canonique.

• Soit $n \geqslant 1$. Notons V_n le vecteur colonne représentatif de H_n' dans la base canonique. D'après la question précédente et par isomorphisme de représentation matricielle, V_n et U_{n-1} sont tous les deux dans le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $-4(n-1)$, qui est de dimension 1 et donc V_n et U_{n-1} sont colinéaires. Par isomorphisme de représentation matricielle : H_n' et H_{n-1} sont colinéaires. De plus, le coefficient dominant de H_n' vaut n tandis que celui de H_{n-1} vaut 1.

$$\boxed{\text{On peut alors conclure que : } H_n' = nH_{n-1}.}$$

• Soit $n \geqslant 2$. On commence par itérer la formule précédente :

$$H_n'' = nH_{n-1}' = n(n-1)H_{n-2}$$

Ainsi, en réécrivant la formule $f(H_n) = -4nH_n$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n''(x) - 4xH_n'(x) = -4nH_n(x)$$

puis :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ n(n-1)H_{n-2}(x) - 4xnH_{n-1}(x) = -4nH_n(x)$$

$$\boxed{\text{En divisant par } -4n\text{, on obtient : } \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) - xH_{n-1}(x) + \frac{n-1}{4}H_{n-2}(x) = 0.}$$

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Posons $g : x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^x$. D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum g(k)\mathbb{P}(X = k)$ converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence pour cette série à termes positifs. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{N} g(k)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{N} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{N} \frac{\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\lambda\right)^k}{k!}$$

  On reconnait une série exponentielle convergente. Ainsi, $g(X)$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\lambda} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\lambda}$$

- D'après ce qui précède et par indépendance des variables aléatoires X_k, il suit que Y_n admet une espérance qui vaut :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(g(X_k)) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\lambda} = \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\lambda}\right)^n = \mathrm{e}^{-\lambda}$$

- On procède de manière analogue pour le moment d'ordre 2 :

$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\lambda} = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{2\lambda}{n}+\frac{\lambda}{n^2}} = \mathrm{e}^{-2\lambda+\frac{\lambda}{n}}$$

- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - \mathbb{E}(Y_n)^2 = \mathrm{e}^{-\lambda\left(2-\frac{1}{n}\right)} - \mathrm{e}^{-2\lambda} = \mathrm{e}^{-2\lambda}\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right)$$

- D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

  i.e.

$$\mathbb{P}\left(\left|Y_n - \mathrm{e}^{-\lambda}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-2\lambda}\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right)}{\varepsilon^2}$$

  Pour obtenir l'intervalle de confiance recherché, il faut choisir ε de telle sorte que :

$$\frac{\mathrm{e}^{-2\lambda}\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right)}{\varepsilon^2} \leqslant \alpha$$

  Cependant, ε ne doit pas dépendre de λ puisqu'il s'agit du paramètre inconnu (on cherche à estimer $\mathrm{e}^{-\lambda}$). Ainsi, il faut trouver une majoration de $\mathrm{e}^{-2\lambda}\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right)$ qui dépende de n mais pas de λ.
  D'après le DL usuel de exp, on a :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

  et donc :

$$\mathrm{e}^x - 1 - 2x = -x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

ce qui donne :

$$e^x - 1 - 2x \underset{x \to 0}{\sim} -x$$

Ainsi, lorsque $x \geqslant 0$ est proche de 0, on a : $e^x - 1 - 2x \leqslant 0$.
En remplaçant x par $\dfrac{\lambda}{n} \geqslant 0$, il suit que pour tout n assez grand : $e^{\frac{\lambda}{n}} - 1 \leqslant 2\dfrac{\lambda}{n}$ et donc

$$e^{-2\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right) \leqslant \frac{2\lambda e^{-2\lambda}}{n}.$$

L'étude de la fonction $\varphi : x \mapsto xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$ montre qu'elle admet un maximum global atteint au point 1 et que la valeur de ce maximum global est e^{-1}.
D'où, pour tout n assez grand :

$$e^{-2\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right) \leqslant \frac{1}{ne}$$

puis :

$$\frac{e^{-2\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{ne\varepsilon^2}$$

Enfin :

$$\frac{1}{ne\varepsilon^2} \leqslant \alpha \iff \varepsilon \geqslant \frac{1}{\sqrt{ne\alpha}}$$

Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{ne\alpha}}$, $[Y_n - \varepsilon, Y_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance asymptotique de $e^{-\lambda}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$.