

Planches HEC

Sujet E5

Exercice avec préparation 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de \mathbb{R}^{2n+1} dont la matrice dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & \vdots \\ 0 & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2n+1}$ où pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 2n+1 \rrbracket^2$: $m_{i,j} = 1$ si $i = j$ ou $i + j = 2n + 2$ et $m_{i,j} = 0$ sinon.

On note (E_1, \dots, E_{2n+1}) la base canonique de $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})$.

1. **Question de cours :** Donner la définition d'une matrice diagonalisable et une caractérisation.
2. a) Justifier que M est diagonalisable.
 b) Justifier que E_{n+1} est un vecteur propre de M et déterminer la valeur propre associée.
3. Notons pour tout entier k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $F_k = \text{Vect}(e_k, e_{2n+2-k})$.
 a) Soit g_k l'application définie sur F_k qui à tout élément x de F_k associe $f(x)$.
 Montrer que g_k est un endomorphisme de F_k et donner sa matrice, A_k , dans la base (e_k, e_{2n+2-k}) .
 b) Diagonaliser A_k .
 c) En déduire une base de F_k dans laquelle la matrice de g_k est diagonale.
4. Déterminer les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres associés à partir des questions précédentes.
5. Pour tout entier k de $\llbracket 1, n \rrbracket$,
 a) Soit B une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A_k$.
 On admettra que B admet les même vecteurs propres que A_k . Déterminer toutes les matrices B qui conviennent.
 b) En déduire qu'il existe un endomorphisme h_k de F_k tel que $h_k^2 = g_k$.
6. Proposer à partir des questions précédentes une matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $H^2 = M$. Combien de telles matrices pourraient être proposées ici ?

Exercice sans préparation 1

Soit le script **Python** :

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 plt.plot(np.linspace(-1, 0.01, 100), np.zeros(100))
4 x = np.arange(0, 3, 0.01)
5 y = x ** 2 / 2
6 y = 1 - np.exp(-y)
7 plt.plot(x,y)
8 plt.show()
```

L'exécution de ce script permet d'obtenir la représentation graphique sur $[-1, 3]$ d'une fonction F . On suppose que l'expression de F proposée sur $[-1, 0]$ est en fait valable sur \mathbb{R}_- et que celle proposée sur $]0, 3]$ est valable sur \mathbb{R}_+ .

1. Tracer la courbe représentative de F . On donne $\exp(\frac{-1}{2}) \simeq 0.6$.
2. F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ?
Si oui, quelle est l'espérance de X si elle existe?
3. On suppose connue une fonction **Python** nommée **simul** permettant de simuler X . Ecrire un script donnant une valeur approchée de π .

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. M est dite diagonalisable si il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.

M est diagonalisable ssi il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M .

2. a) M est symétrique réelle donc diagonalisable.

b) $ME_{n+1} = E_{n+1}$ et $E_{n+1} \neq 0$ donc 1 est valeur propre de M et E_{n+1} est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

3. a) f est linéaire donc g_k est linéaire.

$g_k(e_k) = f(e_k) = e_k + e_{2n+2-k}$ et $g_k(e_{2n+2-k}) = f(e_{2n+2-k}) = e_k + e_{2n+2-k}$ donc, par linéarité, $g_k(F_k) \subset F_k$. D'où g_k est un endomorphisme de F_k et $A_k = \text{Mat}_{(e_k, e_{2n+2-k})}(g_k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\text{Sp}(A_k) = \{0, 2\}$, $E_0(A_k) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_2(A_k) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A_k donc A_k est diagonalisable.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Par formule de changement de base : $A_k = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) D'après ce qui précède, $\text{Mat}_{e_k - e_{2n+2-k}, e_k + e_{2n+2-k}}(g_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. D'après les calculs précédents, $\{0, 1, 2\} \subset \text{Sp}(M)$ et

- $\text{Vect}(E_{n+1}) \subset E_1(M)$ donc $1 \leq \dim(E_1(M))$
- $\text{Vect}(E_k - E_{2n+2-k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket) \subset E_0(M)$ donc $n \leq \dim(E_0(M))$
- $\text{Vect}(E_k + E_{2n+2-k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket) \subset E_2(M)$ donc $n \leq \dim(E_2(M))$

En effet, les trois familles de vecteurs trouvées sont libres (car étagées).

On a alors $2n + 1 \leq \dim(E_1(M)) + \dim(E_0(M)) + \dim(E_2(M)) \leq 2n + 1$ et donc les inégalités précédentes sont toutes des égalités.

Finalement $\text{Sp}(M) = \{0, 1, 2\}$, $E_1(M) = \text{Vect}(E_{n+1})$, $E_0(M) = \text{Vect}(E_k - E_{2n+2-k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket)$, $E_2(M) = \text{Vect}(E_k + E_{2n+2-k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket)$.

5. a) (Analyse) Puisque B admet les même vecteurs propres que A_k , $B' = P^{-1}BP$ est une matrice diagonale.

Or, $(B')^2 = P^{-1}B^2P = P^{-1}A_kP = D$. D'où $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ou $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(Synthèse) Réciproquement, en posant $B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$ ou $B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$, B convient.

b) Il suffit de prendre h_k un endomorphisme représenté dans la base (e_k, e_{2n+2-k}) par l'une des deux matrices proposées à la question précédente.

6. Notons Q la matrice de passage de la base canonique vers la base $(e_{n+1}, e_1 - e_{2n+1}, e_1 + e_{2n+1}, e_2 - e_{2n}, e_2 + e_{2n}, \dots, e_n - e_{n+2}, e_n + e_{n+2})$. On propose les matrices $H = Q\Delta Q^{-1}$ où

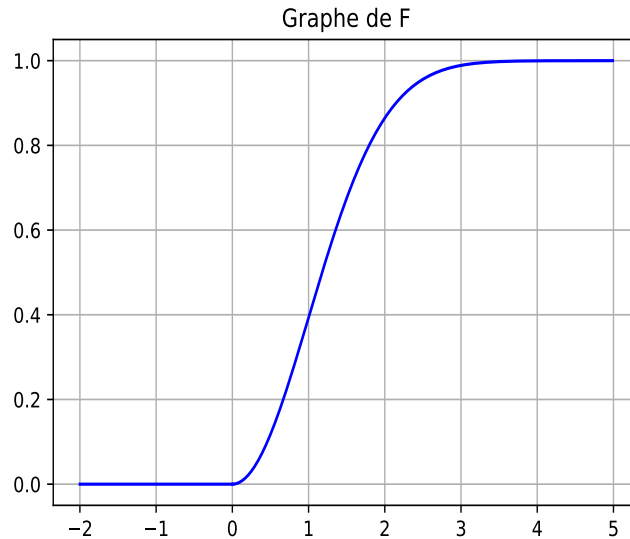
$$\Delta = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & \pm\sqrt{2} & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Il y a 2^{n+1} telles matrices.

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

1. Pour tout $x < 0$, $F(x) = 0$ et pour tout $x \geq 0$, $F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$F'(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } F''(x) = \begin{cases} (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \text{ Point d'inflexion en } 1.$$



2. F est de classe C^1 sur \mathbb{R} , est croissante sur \mathbb{R} et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. Donc F est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité X , de densité $f = F'$.

Pour calculer $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$, on a deux méthodes au choix.

Méthode 1 :

On utilise un moment de loi usuelle. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} xf(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx && \text{(par parité de l'intégrande)} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{E}(Z^2) && \text{(où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} && \text{(par Koenig-Huygens)} \end{aligned}$$

Méthode 2 :

On fait une IPP en choisissant comme primitive de f la fonction $F - 1$. On trouve également $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3. On utilise la méthode de Monte-Carlo :

```
1 N = 10000
2 S = 0
3 for k in range(N):
4     S = S + simul()
5 E = S / N
6 approx = 2 * (E ** 2)
7 print(approx)
```

Sujet E2**Exercice avec préparation 2**

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E .

Soit F l'espace vectoriel des applications numériques f telles que il existe $P \in E$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x}P(x)$$

On pose $f_k : x \mapsto e^{-x}x^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

1. **Question de cours** : soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

a) Donner la définition d'un isomorphisme ϕ de E dans F .

b) Donner une condition nécessaire pour qu'il existe un isomorphisme de E sur F .

c) Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ soit un isomorphisme quand la condition de la question **b)** est vérifiée.

2. Montrer que $\mathcal{C} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ est une base de F .

3. Soit φ l'application définie sur E par : $\forall P \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = e^{-x}(P(x) - xP'(x + 1))$.

a) Montrer que φ est une application linéaire de E dans F .

b) Ecrire la matrice M de φ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} de E et F .

c) φ est-elle un isomorphisme de E sur F ? La matrice M est-elle diagonalisable?

4. Soit E' le sous espace vectoriel de E engendré par $1, X^2$ et X^3 . Soit ψ l'application définie sur E' par : $\forall P \in E', \psi(P) = \varphi(P)$.

Déterminer un espace F' tel que ψ établisse un isomorphisme entre E' et F' .

5. Résoudre dans E l'équation d'inconnue $P : \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = e^{-x}(1 + \alpha x + x^2)$ où α est un paramètre réel.

Exercice sans préparation 2

Soit le script **Python** suivant :

```

1 import numpy.random as rd
2 def X(p):
3     y = 0
4     u = 1
5     while u > p:
6         y = y + 1
7         u = rd.random()
8     return y
9
10 p = float(input('p = '))
11 q = float(input('q = ')) # 0<p<1 et 0<q<1
12 Y = X(p)
13 Z = X(q)
14 M = np.array([[1, 2], [Y, Z]])
15 print(M)

```

1. Expliquer le script.

2. On exécute le script. Quelle est la probabilité que M soit inversible?

Réponses de l'exercice avec préparation 2 :

1. a) Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F .
 b) Il existe un isomorphisme de E sur F ssi $\dim(E) = \dim(F)$.
 c) Sous la condition $\dim(E) = \dim(F)$, on a : $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme ssi $\ker(\phi) = \{0_E\}$ ssi $\text{Im}(\phi) = F$ ssi $\text{rg}(\phi) = \dim(E)$.
2. Conséquence directe du fait que \mathcal{B} est une base de $E = \mathbb{R}_3[X]$.
3. a) La linéarité de φ est immédiate et $P(X) - XP'(X + 1) \in E$ (par calcul de degré par exemple).
 b) On trouve

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- c) La matrice M est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux. On remarque alors que 0 est valeur propre de M donc M n'est pas inversible donc φ n'est pas un isomorphisme de E sur F . La matrice M est carrée d'ordre 4 et possède 4 valeurs propres distinctes donc M est diagonalisable.
4. $(1, X^2, X^3)$ est une base de E' . On pose
 $F' = \text{Vect}(\psi(1), \psi(X^2), \psi(X^3)) = \text{Vect}(\varphi(1), \varphi(X^2), \varphi(X^3)) = \text{Vect}(f_0, -2f_1 - f_2, -3f_1 - 6f_2 - 2f_3)$
 La famille $(f_0, -2f_1 - f_2, -3f_1 - 6f_2 - 2f_3)$ est libre car étagée en (f_0, f_1, f_2, f_3) , donc est une base de F' .

L'application linéaire ψ envoie une base de E' sur une base de F' donc est un isomorphisme.

5. Résoudre dans E l'équation d'inconnue $P : \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(P)(x) = e^{-x}(1 + \alpha x + x^2)$ où α est un paramètre réel.
 Soit $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$.

$$\varphi(P)(x) = e^{-x}(1 + \alpha x + x^2) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a & = 1 \\ & 2 = \alpha \\ c & = -1 \\ & d = 0 \end{cases}$$

- Premier cas : si $\alpha \neq 2$. Dans ce cas, il n'y a pas de solution.
- Deuxième cas : si $\alpha = 2$. Dans ce cas, les solutions sont exactement les polynômes de la forme

$$P(X) = 1 + bX - X^2$$

où $b \in \mathbb{R}$.

Réponses de l'exercice sans préparation 2 :

1. La fonction X simule la loi géométrique de paramètre p . Le script affiche une matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ Y & Z \end{pmatrix}$$

où Y et Z sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$.

2. Soit A l'événement « M est non inversible ». On a $A = [Z = 2Y]$ (les colonnes doivent être liées).

On trouve $\mathbb{P}(A) = \frac{pq(1-q)}{1 - (1-p)(1-q)^2}$ à l'aide de la formule des probabilités totales.

La probabilité que M soit inversible est $1 - \frac{pq(1-q)}{1 - (1-p)(1-q)^2}$.

Sujet E4

Exercice avec préparation 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Soit φ l'application qui à tout polynôme P élément de E associe la matrice colonne $\begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix}$.

1. Question de cours : nombre de racines d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que φ est un isomorphisme de E dans $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

3. On suppose dans cette question seulement que $n = 2$.

Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que pour tout $P \in E$:

$$\text{Si } P(X) = a + bX + cX^2, \text{ alors } \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

4. On revient au cas général.

a) Montrer qu'il existe une matrice $V \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que pour tout $P \in E$:

$$\text{Si } P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i, \text{ alors } \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Justifier que V est inversible.

b) Pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\begin{cases} L_i(i) = 1 \\ L_i(j) = 0 \text{ pour tout } j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{i\} \end{cases}$$

c) On pose pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_i(X) = \sum_{k=0}^n c_{k,i} X^k$ et l'on note $C_i = \begin{pmatrix} c_{0,i} \\ c_{1,i} \\ \vdots \\ c_{n,i} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

Calculer VC_i et en déduire l'expression de V^{-1} .

5. A l'aide de la question 4, retrouver A^{-1} .

Exercice sans préparation 3

Deux urnes A et B contiennent initialement chacune deux boules numérotées 0 et 1. Leur contenu évolue lors d'une expérience aléatoire et est simulé par une liste **Python**.

Ainsi la ligne de code `A = [0, 1]` permet de voir qu'initialement, l'urne A contient une boule numérotée 0 et une autre numérotée 1.

On considère la fonction **Python** suivante qui permet de simuler une variable aléatoire X .

```
1 import numpy.random as rd
2 def simulX():
3     A = [0, 1]
4     B = [0, 1]
5     Y = rd.randint(0, 2, [4, 2])
6     k = 0
7     while sum(A) > 0 and k < 4:
8         i = Y[k, 0]
9         j = Y[k, 1]
10        c = A[i]
11        A[i] = B[j]
12        B[j] = c
13        k = k + 1
14    return k
```

Expliquer le protocole ainsi simulé et donner la loi de X .

Réponses de l'exercice avec préparation 3 :

1. Un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul possède au plus n racines distinctes. Ainsi,

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], (P = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \iff P \text{ possède au moins } n + 1 \text{ racines distinctes})$$

2. φ est linéaire de E dans $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, $\dim(E) = n + 1 = \dim(\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}))$ et $\ker(\varphi) = \{0_E\}$ d'après la question de cours.

3. Avec les notations de l'énoncé, on a

$$\begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a + b + c \\ a + 2b + 4c \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. a) La matrice suivante convient :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & \dots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & \dots & n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

On note \mathcal{B} la base canonique de E et \mathcal{B}' la base canonique de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$. On a $V = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\varphi)$ et φ est un isomorphisme, donc V est inversible.

b) On note $\mathcal{B}' = (E_0, \dots, E_n)$. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, par bijectivité de φ , il existe un unique polynôme $P \in E$ vérifiant $\varphi(P) = E_i$, que l'on note L_i (on a $L_i = \varphi^{-1}(E_i)$).

c) Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a $VC_i = \begin{pmatrix} L_i(0) \\ L_i(1) \\ \vdots \\ L_i(n) \end{pmatrix} = E_i$. Donc $C_i = V^{-1}E_i$, donc C_i est la $(i + 1)$ -ième colonne de V^{-1} .

5. $L_0 = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2$, $L_1 = 2X - X^2$ et $L_2 = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2$ donc

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

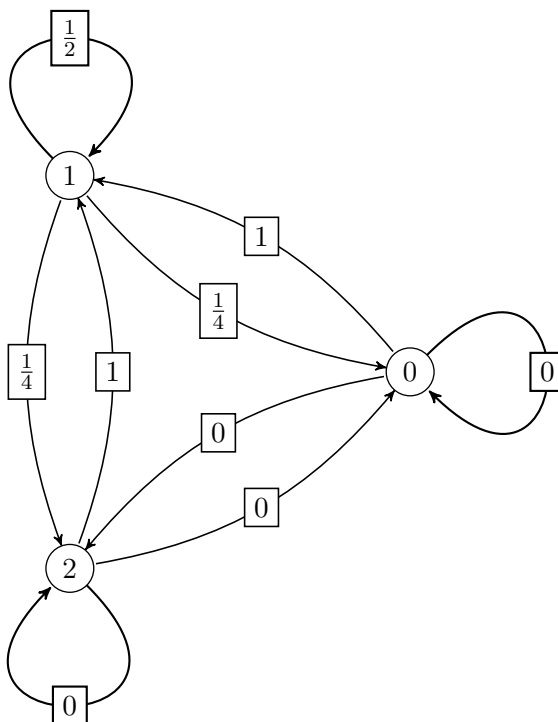
Réponses de l'exercice sans préparation 3 :

A chaque étape on choisit une boule au hasard dans A et une boule au hasard dans B et on les change d'urnes. On effectue au maximum 4 étapes. Le résultat de la fonction donne

- le nombre d'échanges nécessaires pour que A contienne les deux boules numérotées 0 si cela se produit en trois étapes ou moins.
- 4 si au bout de trois échanges on n'a pas obtenu les deux boules 0 dans A

On a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Notons Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules 0 dans l'urne A à l'issue de k échanges. En particulier : $Y_0 = 1$. La suite (Y_k) est une chaîne de Markov dont on peut représenter le graphe probabiliste associé :



En s'aidant du graphe, on remarque que :

- $[X = 1] = [Y_1 = 2]$ donc $\mathbb{P}([X = 1]) = \frac{1}{4}$
- $[X = 2] = [Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 2]$ donc $\mathbb{P}([X = 2]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ (formule des probabilités composées)
- $[X = 3] = ([Y_1 = 1] \cap [Y_2 = 1] \cap [Y_3 = 2]) \cup ([Y_1 = 0] \cap [Y_2 = 1] \cap [Y_3 = 2])$
 donc $\mathbb{P}([X = 3]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ (incompatibilité et formule des probabilités composées)
- En utilisant le sce $([X = k])_{k \in \llbracket 1,4 \rrbracket}$, on obtient $\mathbb{P}([X = 4]) = \frac{1}{2}$.