Planches HEC

Sujet Maths appliquées 3

Exercice avec préparation 1

A et B sont deux sacs qui contiennent chacun deux boules portant le numéro 1 ou le numéro 0. Une expérience consiste à tirer simultanément une boule de chaque sac et à la replacer dans l'autre sac.
On part des sacs A_0 contenant deux boules marquées 1 et B_0 contenant deux boules marquées 0 et on définit par récurrence la suite de sacs A_n, B_n par : l'expérience appliquée à A_n, B_n donne A_{n+1}, B_{n+1}. S_n [resp. T_n] est la variable aléatoire égale à la somme des numéros sur les boules de A_n [resp. B_n] ($n \in \mathbb{N}$).

1. *a)* **Cours.** Loi d'une variable aléatoire discrète finie.

b) *i)* Ecrire le code d'une fonction `echange(A,B)` qui prend en entrée les sacs A et B, représentés sous forme de liste à deux éléments, et qui renvoie la nouvelle composition de sacs après échange aléatoire d'une boule de A et d'une boule de B.

ii) Ecrire le code d'une fonction `simuleS(n)` qui prend en entrée un entier `n` et réalise une simulation de la variable aléatoire S_n.

2. *a)* Que valent S_0 et S_1 ? Expliciter la loi de S_2.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$. Expliciter la loi de S_n en fonction de p_n et calculer l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$. Ce résultat était-il prévisible ? Comparer $\mathbb{V}(S_n)$ et $\mathbb{V}(T_n)$. Exprimer $\mathbb{V}(S_n)$ en fonction de p_n.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n, et en déduire p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter la loi de S_n en fonction de n.

3. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Pour $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, comment le produit ME se déduit-il de M ? Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n E = A^n$.

b) En utilisant les résultats précédents, calculer A^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice sans préparation 1

Soit n un entier $\geqslant 6$. Les n cadres d'une entreprise soit s'apprécient mutuellement, soit se détestent mutuellement. On peut schématiser la situation par un graphe non orienté simple dont les sommets « sont » les cadres et où les arêtes matérialisent les relations d'estime réciproque. Ici, ne pas s'estimer mutuellement équivaut à se détester mutuellement.

1. Chaque cadre dresse la liste des collègues qu'il apprécie.

a) Montrer que si on fait deux tas selon la parité de chaque liste, celui des listes contenant un nombre impair de noms contient un nombre pair de listes.

b) Montrer qu'il existe au moins deux listes ayant le même nombre de noms.

2. Pour mesurer l'impact des affinités sur le travail d'équipe, le DRH veut former un groupe de travail homogène de 3 de ces cadres. Montrer qu'il peut toujours soit réunir 3 personnes qui s'apprécient mutuellement, soit réunir 3 personnes qui se détestent mutuellement.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. a) Soit X une variable aléatoire discrète finie. La loi de X est la donnée :

- de son univers image $X(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par X),
- et des probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

b) ***i)*** Proposons d'abord un programme **Python** utilisant une variable auxiliaire permettant de stocker le nombre que l'on supprime de la liste A avant de le mettre dans la liste B.

```
def echange1(A,B):
    i = rd.randint(0,2)
    j = rd.randint(0,2)
    aux = A[i]
    A[i] = B[j]
    B[j] = aux
    return A,B
```

On peut cependant être plus efficace en utilisant une fonctionnalité **Python** de « double affectation » :

```
def echange2(A,B):
    i = rd.randint(0,2)
    j = rd.randint(0,2)
    A[i], B[j] = B[j], A[i]
    return A,B
```

ii) On propose la fonction **Python** suivante :

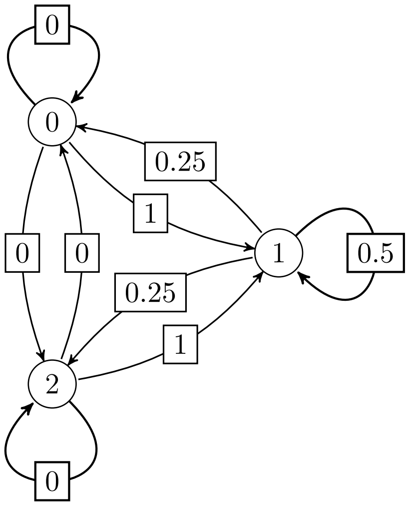
```
def simuleS(n):
    A = [1,1]
    B = [0,0]
    for k in range(n):
        A, B = echange2(A,B)
    return sum(A)
```

2. a)
- Tout d'abord : $S_0 = 2$ (c'est une variable aléatoire constante).
- Ensuite, il est certain qu'après un unique échange, les sacs A et B vont tous les deux contenir une boule 0 et une boule 1. Ainsi : $S_1 = 1$ (c'est également une variable aléatoire constante).
- D'après ce qui précède : $S_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Détaillons les différents événements :
  - × L'événement $[S_2 = 0]$ est réalisé si et seulement si on tire la boule 1 dans le sac A et la boule 0 dans le sac B. Ainsi (par équiprobabilité et par indépendance des deux tirages) : $\mathbb{P}([S_2 = 0]) = \dfrac{1}{4}$.
  - × L'événement $[S_2 = 2]$ est réalisé si et seulement si on tire la boule 0 dans le sac A et la boule 1 dans le sac B. Ainsi : $\mathbb{P}([S_2 = 0]) = \dfrac{1}{4}$.
  - × L'événement $[S_2 = 1]$ est réalisé dans tous les autres cas (c'est-à-dire lorsque l'on tire le même numéro dans les deux sacs). Ainsi : $\mathbb{P}([S_2 = 1]) = \dfrac{1}{2}$.

b)
- Après un échange, la répartition des boules entre les deux sacs A et B est symétrique. Ainsi, il vient par symétrie : $\mathbb{P}([S_n = 2]) = \mathbb{P}([S_n = 0]) = p_n$. La famille $([S_n = i])_{i \in \{0,1,2\}}$ est un système complet d'événements donc : $\mathbb{P}([S_n = 1]) = 1 - 2p_n$. La variable aléatoire S_n étant finie, elle admet une espérance et :

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = 0 \times p_n + 1 \times (1 - 2p_n) + 2 \times p_n = 1.}$$

- Ce résultat était prévisible par symétrie de la répartition initiale et parce que 1 est la valeur moyenne entre 0 et 2 (les sacs ont autant de chance d'augmenter leur contenu de 1 que de le diminuer de 1 lorsqu'ils ont une position moyenne avec un 0 et un 1, mais lorsqu'ils sont sur une position extrémale ils doivent nécessairement revenir à la position moyenne). Remarquons que la suite (S_n) est une chaîne de Markov et représentons là ci-dessous :



Par symétrie des rôles, S_n et T_n suivent la même loi (pour $n \geqslant 1$). D'où : $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}(T_n)$.
On remarque de plus que $S_n + T_n = 2$. On en déduit que $\mathbb{E}(S_n) + \mathbb{E}(T_n) = 2\,\mathbb{E}(S_n) = 2$. On retrouve ainsi : $\mathbb{E}(S_n) = 1$ (ce résultat était prévisible de plein de manières différentes, sans avoir à calculer la loi de S_n).

- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{E}(S_n^2) - \mathbb{E}(S_n)^2 \\ &= \big(0^2 \times p_n + 1^2 \times (1-2p_n) + 2^2 \times p_n\big) - 1^2 \\ &= 2p_n\end{aligned}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que :

$$[S_{n+1} = 0] = [S_{n+1} = 0] \cap [S_n = 1]$$

(un sac ne peut contenir deux boules 0 que si il contenait à l'étape précédente une boule 0 et une boule 1).
D'après le graphe probabiliste associé à cette chaîne de Markov :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}([S_n = 1])\mathbb{P}_{[S_n=1]}([S_{n+1} = 0]) = (1-2p_n)\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique et il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right)$$

Loi de S_n :

$i \in S_n(\Omega)$	0	1	2
$\mathbb{P}([S_n = i])$	$\frac{1}{6}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right)$	$\frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right)$	$\frac{1}{6}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right)$

3. Notons, pour toute matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et tout entier $i \in \{1,2,3\}$, $C_i(N)$ la colonne numéro i de N.

a) On a :

$$C_1(ME) = ME\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = C_3(M)$$

$$C_2(ME) = ME\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = C_2(M)$$

$$C_3(ME) = ME\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = C_1(M)$$

Ainsi, la matrice ME se déduit de M en permutant les colonnes 1 et 3.
On remarque que les colonnes 1 et 3 de A sont égales et donc $AE = A$. On montre alors par récurrence (immédiate, il suffit de multiplier à gauche par A pour l'hérédité) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^nE = A^n.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$V_n = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(S_n = 0) & \mathbb{P}(S_n = 1) & \mathbb{P}(S_n = 2)\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$$

le n^{e} état probabiliste de la chaîne de Markov. On a en particulier :

$$V_0 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \textit{(car } S_0 = 2\textit{)}$$
$$V_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \textit{(car } S_1 = 1\textit{)}$$

Posons $M = {}^tA$ la matrice de transition de cette chaîne de Markov. En appliquant la formule des probabilités totales, il vient :

$$V_{n+1} = V_nM$$

et par récurrence immédiate on obtient :

$$V_n = V_0M^n \qquad \text{et} \qquad V_{n+1} = V_1M^n$$

La première relation donne la troisième ligne de M^n (et donc la troisième colonne de A^n) tandis que la deuxième relation donne la deuxième ligne de M^n (et donc la deuxième colonne de A^n).
On en déduit que :

$$A^n = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} & p_n \\ 1-2p_n & 1-2p_{n+1} & 1-2p_n \\ p_n & p_{n+1} & p_n \end{pmatrix}$$

ou, de manière explicite :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) & \frac{1}{6}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) & \frac{1}{6}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) \\ \frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right) & \frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) & \frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right) \\ \frac{1}{6}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) & \frac{1}{6}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) & \frac{1}{6}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) \end{pmatrix}$$

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

1. ***a)*** Il s'agit de la conséquence classique de la formule d'Euler.

Numérotons $0, 1, \dots, n-1$ les sommets du graphe et notons a le nombre d'arêtes du graphe. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \deg(k) = 2a$$

Le terme de droite étant pair, il y a forcément un nombre pair de sommets de degré impair.

b) Supposons que tous les sommets soient de degrés distincts. Il y a n sommets et le degré d'un sommet est un nombre entier entre 0 et $n-1$. Ainsi, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, il existe un unique sommet de degré i. En particulier :

- Il existe un sommet de degré 0, qui n'a aucun voisin.
- Il existe un sommet de degré $n-1$, voisin de tous les autres sommets.

C'est absurde.

2. Soit s un sommet fixé. Remarquons qu'il y a $n-1$ autres sommets et que $n-1 \geqslant 5$.

- Premier cas : s admet au moins 3 voisins i, j et k. Il y a deux possibilités :
  × si deux de ces voisins sont reliés (par exemple i et j), alors $\{s, i, j\}$ est un triangle de trois cadres qui s'apprécient,
  × sinon, $\{i, j, k\}$ est un triangle de sommets sans arêtes, donc un groupe de 3 cadres qui se détestent.
- Deuxième cas : s admet au plus 2 voisins. Il y a donc au moins 3 sommets i, j et k qui ne sont pas voisins de s. Il y a deux possibilités :
  × si deux de ces voisins ne sont pas reliés (par exemple i et j), alors $\{s, i, j\}$ est un groupe de trois cadres qui se détestent,
  × sinon, $\{i, j, k\}$ est un triangle de sommets mutuellement reliés, donc un groupe de 3 cadres qui s'apprécient.

Sujet Maths appliquées 7

Exercice avec préparation 2
Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in [\![0, N]\!]$. Un joueur arrive au casino avec une fortune de n euros et joue à la roulette. A chaque partie, la probabilité de gagner vaut p avec $p \in]0,1[$. Le déroulement d'une partie est le suivant : le joueur mise un euro, s'il gagne on lui rend son euro avec un euro de plus, s'il perd on ne lui donne rien.
Le joueur a décidé de s'arrêter de jouer lorsqu'il aura tout l'argent disponible dans le casino, soit N euros, ou lorsqu'il n'aura plus d'argent. On note T_n la variable aléatoire représentant le temps de jeu du joueur.
On admet que la variable aléatoire T_n admet une espérance notée $\mathbb{E}(T_n)$.

1. Question de cours : Énoncer la formule des probabilités totales.

2. Écrire une fonction **Python** qui renvoie une simulation de la variable aléatoire T_n.

3. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette question que $n \in [\![1, N-1]\!]$.
Montrer que $\mathbb{P}(T_n = j) = p\,\mathbb{P}(T_{n+1} = j-1) + (1-p)\,\mathbb{P}(T_{n-1} = j-1)$.

4. En déduire que, pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$,

$$\mathbb{E}(T_n) = p(1 + \mathbb{E}(T_{n+1})) + (1-p)(1 + \mathbb{E}(T_{n-1}))$$

5. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. Déterminer une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de n, p et N. On pourra faire intervenir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \mathbb{E}(T_n) + n\alpha$ avec α un réel à déterminer.

Exercice sans préparation 2
On s'intéresse à la suite suivante :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{1+u_n}} \qquad u_0 > 0$$

1. Convergence de (u_n) (en fonction de u_0) ?

2. Etudier la convergence de :

$$v_{n+1} = \frac{v_n^\alpha}{\sqrt{1+v_n}} \qquad v_0 > 0$$

Réponses de l'exercice avec préparation 2 :

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements (où $I \subset \mathbb{N}$). Soit B un événement. Alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

Si de plus, pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$$

2. On propose la fonction **Python** suivante :

```
def simulT(n, N, p):
    T = 0
    fortune = n
    while fortune > 0 and fortune < N:
        T += 1
        if rd.random() < p:
            fortune += 1
        else:
            fortune -= 1
    return T
```

3. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Notons A : « le joueur gagne la première partie ». D'après l'énoncé : $\mathbb{P}(A) = p \neq 0$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A, \overline{A})$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n = j) &= \mathbb{P}([T_n = j] \cap A) + \mathbb{P}([T_n = j] \cap \overline{A}) \\ &= p\,\mathbb{P}_A(T_n = j) + (1-p)\,\mathbb{P}_{\overline{A}}(T_n = j) \\ &= p\,\mathbb{P}(T_{n+1} = j-1) + (1-p)\,\mathbb{P}(T_{n-1} = j-1)\end{aligned}$$

En effet :

- Si l'événement A est réalisé, alors pour que l'expérience se termine en j parties en partant d'une somme de n euros, il faut et il suffit que l'expérience se termine en $j-1$ parties avec une somme de $n+1$ euros (on vient de gagner 1 euro), mais cette fois-ci en commençant à compter à partir de la deuxième partie. De plus, on suppose que les résultats des parties sont indépendants entre eux. Pour terminer, la loi de T_n ne change pas selon la partie de départ que l'on choisit.
- De manière analogue, si l'événement $\overline{A}$ est réalisé, alors pour que l'expérience se termine en j parties en partant d'une somme de n euros, il faut et il suffit que l'expérience se termine en $j-1$ parties avec une somme de $n-1$ euros (on vient de perdre 1 euro), mais cette fois-ci en commençant à compter à partir de la deuxième partie.
- Comme on a supposé dans cette question que $n \in [\![1, N-1]\!]$, on a bien $n+1 \in [\![0, N]\!]$ et $n-1 \in [\![0, N]\!]$.

Commentaire

On peut sans doute se contenter d'une explication telle que présentée ci-dessus pour justifier la formule demandée.
De manière plus formelle, on peut introduire la variable $\tilde{T}_n$ définie exactement comme la variable aléatoire T_n mais en commençant le décompte à partir de la deuxième partie. Il est clair que T_n et $\tilde{T}_n$ suivent la même loi (temps d'attente avant la fin du jeu, en partant de la même somme d'argent initiale). On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([T_n = j] \cap A) &= \mathbb{P}\left(\left[\tilde{T}_{n+1} = j-1\right] \cap A\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\tilde{T}_{n+1} = j-1\right]\right) \mathbb{P}(A) && \textit{(par indépendance des parties)} \\ &= p\,\mathbb{P}\left(\left[\tilde{T}_{n+1} = j-1\right]\right) \\ &= p\,\mathbb{P}\left([T_{n+1} = j-1]\right) && \textit{(car } T_{n+1} \textit{ et } \tilde{T}_{n+1} \textit{ suivent la même loi)}\end{aligned}$$

et le calcul est analogue avec $\overline{A}$.

4. Soit $n \in [\![1, N-1]\!]$. On a supposé que T_k admettait une espérance pour tout entier naturel $k \in [\![0, N]\!]$ donc les sommes infinies qui suivent sont bien définies.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{j=0}^{+\infty} j\,\mathbb{P}(T_n = j) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} j\,\mathbb{P}(T_n = j) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} j\left(p\,\mathbb{P}(T_{n+1} = j-1) + (1-p)\,\mathbb{P}(T_{n-1} = j-1)\right) \\ &= p\sum_{j=1}^{+\infty} j\,\mathbb{P}(T_{n+1} = j-1) + (1-p)\sum_{j=1}^{+\infty} j\,\mathbb{P}(T_{n-1} = j-1) \\ &= p\sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)\,\mathbb{P}(T_{n+1} = j) + (1-p)\sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)\,\mathbb{P}(T_{n-1} = j) \\ &= p\left(\sum_{j=0}^{+\infty} j\,\mathbb{P}(T_{n+1} = j) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_{n+1} = j)\right) + (1-p)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} j\,\mathbb{P}(T_{n-1} = j) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_{n-1} = j)\right) \\ &= p(\mathbb{E}(T_{n+1}) + 1) + (1-p)(\mathbb{E}(T_{n-1}) + 1)\end{aligned}$$

en utilisant le fait que les familles $([T_{n+1} = j])_{j \in \mathbb{N}}$ et $([T_{n-1} = j])_{j \in \mathbb{N}}$ sont des systèmes complets d'événements.

Commentaire

On peut aussi utiliser le thm de transfert. Par exemple :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)\,\mathbb{P}(T_{n+1} = j) = \mathbb{E}(T_{n+1} + 1) = \mathbb{E}(T_{n+1}) + 1$$

5. Soit $n \in [\![1, N-1]\!]$. On cherche une valeur de α telle que la suite $(u_n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ soit récurrente linéaire double.
Tout d'abord, en traduisant la formule obtenue à la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n - n\alpha &= p(1 + u_{n+1} - (n+1)\alpha) + (1-p)(1 + u_{n-1} - (n-1)\alpha) \\ &= 1 + \alpha(1-2p) - n\alpha + pu_{n+1} + (1-p)u_{n-1} \end{aligned}$$

(après avoir développer et simplifier)

D'où :

$$pu_{n+1} - u_n + (1-p)u_{n-1} = (2p-1)\alpha - 1$$

On pose donc :

$$\alpha = \frac{1}{2p-1} \qquad \textit{(possible car } p \neq \frac{1}{2}\textit{)}$$

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $p < \frac{1}{2}$ (ce qui est toujours vrai en pratique lorsque l'on joue à la roulette au casino : « le casino est toujours gagnant »).
L'équation caractéristique associée à la suite (u_n) est :

$$px^2 - x + (1-p) = 0$$

de discriminant :

$$\Delta = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (1-2p)^2$$

et dont les racines sont :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2p} = \frac{1-(1-2p)}{2p} = 1, \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2p} = \frac{1+(1-2p)}{2p} = \frac{1-p}{p}$$

Ainsi, il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$:

$$u_n = \lambda + \mu \left(\frac{1-p}{p}\right)^n$$

De plus, on a les conditions aux bords :

$$u_0 = \mathbb{E}(T_0) + 0 \times \alpha = 0, \qquad u_N = \mathbb{E}(T_N) + N\alpha = N\alpha$$

Commentaire

On remarquera que, dans cet exercice, on ne connait pas u_1 et donc on ne peut pas raisonner avec les « conditions initiales » comme on le fait habituellement.

Trouvons maintenant les valeurs de λ et μ :

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda & + \ \mu & = 0 \\ \lambda & + \left(\frac{1-p}{p}\right)^N \mu & = N\alpha \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{N\alpha}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1} \\ \mu = \dfrac{N\alpha}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1} \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$:

$$u_n = \mu\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1\right) = N\alpha\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1}$$

et

$$\mathbb{E}(T_n) = u_n - n\alpha = \alpha\left(N\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1} - n\right) = \frac{1}{2p-1}\left(N\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1} - n\right)$$

Réponses de l'exercice sans préparation 2 :

1. • On commence par démontrer par récurrence (immédiate) que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.}$$

• Étudions la monotonie de la suite (u_n). Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}}$$

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{1+x}} > 1 &\iff x > \sqrt{1+x} \\ &\iff x^2 > 1 + x \\ &\iff x^2 - x - 1 > 0\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $P(x) = x^2 - x - 1$ est :

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

Ses racines sont :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$$

On démontre alors par récurrence la disjonction de cas suivante :

× Si $u_0 > x_2$, alors la suite (u_n) est strictement croissante et à valeurs dans $[u_0, +\infty[$.

× Si $u_0 = x_2$, alors la suite (u_n) est constante.

× Si $u_0 < x_2$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante et à valeurs dans $]0, u_0]$.

• Traitons le cas où $u_0 < x_2$.
Dans ce cas la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc, par théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.
Par théorème de point fixe (la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$), on a $\ell = f(\ell)$.
Or :

$$\begin{aligned}\ell = f(\ell) &\iff \ell(\sqrt{1+\ell} - \ell) = 0 \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{1+\ell} = \ell \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad 1 + \ell = \ell^2 \qquad \textit{(car } \ell \geqslant 0\textit{)} \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad P(\ell) = 0 \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = x_2\end{aligned}$$

De plus, par décroissance de (u_n), on a $\ell \leqslant u_0 < x_2$. Donc on a forcément $\ell = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } 0.}$$

- Traitons le cas où $u_0 > x_2$.
  Dans ce cas la suite (u_n) est croissante. Supposons qu'elle soit majorée. Alors elle converge vers un point fixe de f. Or sa limite ℓ vérifie (par croissance de (u_n)) : $\ell \geqslant u_0 > x_2 > 0$. Donc ℓ ne peut pas être égal à un point fixe de f. C'est absurde.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est croissante et non majorée et donc } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

Question supplémentaire : dans le cas où $u_0 > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$*, déterminer un équivalent simple de* u_n *lorsque* $n \to +\infty$*.*

- Commençons par une heuristique pour trouver une conjecture.
  On sait dans ce cas que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi :
  $$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{\sqrt{u_n}} = u_n^{3/2}$$
  et donc
  $$\ln(u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}\ln(u_n)$$
  Posons $z_n = \ln(u_n)$. La suite (z_n) doit se comporter comme une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{2}$ lorsque n est grand. Ainsi, on peut conjecturer que :
  $$z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda \left(\frac{3}{2}\right)^n$$
  où λ est un terme compensant le comportement de la suite (z_n) pour les premiers termes (penser que $z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_{n_0}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-n_0}$ où n_0 est le « rang à partir duquel » la suite (z_n) se comporte comme une suite géométrique et poser $\lambda = z_{n_0}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-n_0}$).
  On conjecture alors que la suite $\left(z_n\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-n}\right)$ est convergente.

- Démontrons la conjecture précédente. Posons $w_n = z_n \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-n}$.

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= z_{n+1} \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \\
&= \ln(u_{n+1}) \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \\
&= \ln\left(\frac{u_n^2}{\sqrt{1+u_n}}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \\
&= \left(2\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln(1+u_n)\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \\
&= \left(2\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \\
&= \left(\frac{3}{2}z_n - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \\
&= w_n - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)
\end{aligned}$$

  Or, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc :

$$w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2u_n}\left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o\,(q^n) \qquad (*)$$

  où $q = \dfrac{2}{3} \in]-1,1[$.
  Il suit que la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ est convergente et donc la suite (w_n) converge. Notons w sa limite.

- Posons $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} (w_k - w_{k+1})$ de sorte que $w_n = w + R_n$.
  Ainsi :

$$z_n = w\left(\frac{3}{2}\right)^n + R_n\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

  et

$$u_n = \exp\left(w\left(\frac{3}{2}\right)^n + R_n\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$$

  On pourra conclure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(w\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right)$ si on démontre que $R_n\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *i.e.* si $R_n \underset{n\to+\infty}{=} o\,(q^n)$.

- La démonstration de la relation de négligeabilité $R_n \underset{n\to+\infty}{=} o\,(q^n)$ déborde largement du cadre du programme d'ECG maths appliquées. Il s'agit d'un résultat de sommation des relations de comparaisons que l'on applique à $(*)$ conjugué au fait que :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q}$$

2. • On commence par démontrer par récurrence (immédiate) que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n > 0.}$$

- Traitons le cas où $\alpha \leqslant \dfrac{3}{2}$. On a alors $\alpha - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. De deux choses l'une :
  × si $v_n \geqslant 1$ alors : $v_n^{\alpha-1} \leqslant \sqrt{v_n} \leqslant \sqrt{1+v_n}$.
  × si $0 < v_n < 1$ alors : $v_n^{\alpha-1} \leqslant 1 \leqslant \sqrt{1+v_n}$.
  Dans tous les cas, on a :
  $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n^{\alpha-1}}{\sqrt{1+v_n}} \leqslant 1$$
  et donc la suite (v_n) est décroissante. Puisque elle est minorée par 0, on peut conclure qu'elle converge.

  <u>Traitons dans la suite le cas où $\alpha > \dfrac{3}{2}$.</u>
- Si la suite (v_n) converge vers une limite notée ℓ, alors ℓ vérifie nécessairement l'équation de point fixe :
  $$\ell^2 \left(\ell^{2\alpha-2} - \ell - 1\right) = 0$$
  Posons, pour tout $x > 0$: $g_\alpha(x) = x^{2\alpha-2} - x - 1$. L'équation de point fixe se réécrit alors :
  $$\ell = 0 \qquad \text{ou} \qquad g_\alpha(\ell) = 0 \qquad (*)$$
- Étudions la monotonie de la suite (v_n). Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n^{\alpha-1}}{\sqrt{1+v_n}}$$
  Soit $x > 0$.
  $$\begin{aligned} \frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{1+x}} > 1 &\iff x^{\alpha-1} > \sqrt{1+x} \\ &\iff x^{2\alpha-2} > 1+x \\ &\iff x^{2\alpha-2} - x - 1 > 0 \\ &\iff g_\alpha(x) > 0 \end{aligned}$$
  On a :
  $$g'_\alpha(x) = 2(\alpha-1)x^{2\alpha-3} - 1$$
  et
  $$\begin{aligned} g'_\alpha(x) > 0 &\iff x^{2\alpha-3} > \frac{1}{2(\alpha-1)} && \textit{(car } \alpha - 1 > 0\textit{)} \\ &\iff x > \left(\frac{1}{2(\alpha-1)}\right)^{\frac{1}{2\alpha-3}} = y_\alpha && \textit{(car } 2\alpha - 3 > 0\textit{)} \end{aligned}$$
  Le tableau de variations de g_α est donné par :

x	0		y_α		$+\infty$
Signe de $g'_\alpha(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g_α	-1	$\searrow$	$g_\alpha(y_\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Puisque g_α est strictement décroissante sur $]0, y_\alpha]$, il suit que $g_\alpha(y_\alpha) < -1 < 0$ et g_α ne s'annule pas sur $]0, y_\alpha]$.
En appliquant le théorème de la bijection sur $[y_\alpha, +\infty[$, on démontre qu'il existe un unique réel $z_\alpha > y_\alpha$ tel que $g_\alpha(z_\alpha) = 0$.
On démontre alors par récurrence la disjonction de cas suivante :

- × Si $v_0 > z_\alpha$, alors la suite (v_n) est strictement croissante et à valeurs dans $[z_\alpha, +\infty[$. Puisque aucun point fixe (solution de $(*)$) ne se trouve dans cet intervalle, la suite (v_n) diverge vers $+\infty$.
- × Si $v_0 = z_\alpha$, alors la suite (v_n) est constante.
- × Si $v_0 < z_\alpha$, alors la suite (v_n) est strictement décroissante et à valeurs dans $]0, v_0]$. Puisque (v_n) est minorée par 0, elle converge (vers 0 qui est l'unique point fixe dans l'adhérence de cet intervalle).