

Planches HEC

Sujet Maths appliquées 5

Exercice avec préparation 1

Soit la relation de récurrence : $(\mathcal{R}) \begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 4 + e^{u_n} \end{cases}$.

1. **Cours.** Théorème de la limite monotone pour une suite.
2. Montrer que (\mathcal{R}) définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que cette suite est décroissante, et qu'elle tend vers $-\infty$.
3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = 1 - 4n + \sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$.
 En déduire : $1 - 4n \leq u_n \leq e - 3n$.
 b) Montrer que la somme $\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$ est majorée par la constante $\frac{e^e}{1 - e^{-3}}$.
4. a) Déterminer une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général de la forme $w_n = c \cdot n^p$, avec $c \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, telle que les suites $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soient équivalentes quand n tend vers $+\infty$.
 b) Montrer que pour $n \geq 700$, $\left| \frac{u_n}{w_n} - 1 \right| < 10^{-2}$.
 c) Compléter le programme **Python** ci-dessous pour qu'il donne le plus petit entier naturel n tel que $\left| \frac{u_n}{w_n} - 1 \right| < 10^{-2}$.

```

1  from numpy import exp, abs
2
3  u = -3 + np.exp(1)
4  n = 1
5
6  while ..... >= .01:
7      u = .....
8      n += 1
9  print(n)
    
```

Exercice sans préparation 1

Soient A_1, \dots, A_n des événements d'un espace probabilisé. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note B_k l'événement « au moins k événements parmi A_1, \dots, A_n sont réalisés ».

En considérant la variable aléatoire $X = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}$, montrer que :

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k).$$

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soit (u_n) une suite de réels.

- Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge.
- Si (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.

2. Posons $f : x \mapsto x - 4 + e^x$. La fonction f est bien définie sur \mathbb{R} et la propriété (\mathcal{R}) se réécrit :

$$(\mathcal{R}) \begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} .$$

Ainsi, il vient que la suite (u_n) est bien définie.

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : \ll u_n \leq 1 \gg$.

Initialisation :

On a $u_0 = 1$. D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - 4 + e^{u_n} \\ &\leq 1 - 4 + e && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &\leq e - 3 \end{aligned}$$

Or, $e \simeq 2,7$ donc $u_{n+1} < 0 \leq 1$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = e^{u_n} - 4 \leq e - 4 < 0$$

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

Supposons que (u_n) soit minorée. Dans ce cas elle converge par théorème de la limite monotone. Notons ℓ sa limite. Par théorème de point fixe (la fonction f est continue sur \mathbb{R}), on obtient :

$$\ell = \ell - 4 + e^\ell$$

et donc :

$$e^\ell = 4$$

Or, $\ell \leq u_0 = 1$ par décroissance de (u_n) . C'est absurde.

On peut alors conclure que (u_n) est décroissante et non minorée donc elle diverge vers $-\infty$.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sommons la relation de récurrence $u_{k+1} - u_k = -4 + e^{u_k}$ pour k variant de 0 à $n-1$ (valable car $n-1 \geq 0$).

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (-4 + e^{u_k})$$

et donc, par télescopage :

$$u_n - u_0 = -4n + \sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$$

d'où :

$$u_n = 1 - 4n + \sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}$$

On remarque pour finir que cette formule est encore valable pour $n = 0$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - 4n + \sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k}.$

- D'après la formule précédente :

$$u_n - (1 - 4n) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} \geq 0$$

par positivité de la fonction exponentielle.

- On a vu lors de la récurrence de la question 2 que, pour tout $k \geq 1, u_k < 0$. Il suit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} = e + \sum_{k=1}^{n-1} e^{u_k} \leq e + \sum_{k=1}^{n-1} 1 = e + n - 1$$

D'où :

$$u_n \leq 1 - 4n + e + n - 1 = e - 3n$$

L'encadrement étant encore valable pour $n = 0$, on peut conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 - 4n \leq u_n \leq e - 3n.$$

- b)** Pour $n = 0$, la somme est vide donc vaut 0. Dans ce cas la majoration est valable. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} &\leq \sum_{k=0}^{n-1} e^{e-3k} \\ &= e^e \sum_{k=0}^{n-1} (e^{-3})^k \\ &\leq e^e \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-3})^k \quad (\text{série géométrique convergente car } e^{-3} \in]-1, 1[) \\ &= e^e \frac{1}{1 - e^{-3}} \\ &= \frac{e^e}{1 - e^{-3}} \end{aligned}$$

- 4. a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} e^{u_k} \leq \frac{e^e}{1 - e^{-3}}$$

donc :

$$1 - 4n \leq u_n \leq 1 - 4n + \frac{e^e}{1 - e^{-3}}$$

d'où :

$$1 - \frac{1}{4n} \geq \frac{u_n}{-4n} \geq 1 - \frac{1}{4n} - \frac{e^e}{(1 - e^{-3})4n}$$

Par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{-4n} = 1$$

On peut conclure que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -4n$ (on pose $w_n = -4n$ pour la suite).

b) Soit $n \geq 700$. D'après les calculs précédents :

$$\left| \frac{u_n}{w_n} - 1 \right| \leq \frac{1 + \frac{e^e}{1 - e^{-3}}}{4n}$$

× D'une part : $4n \geq 2800 = 28 \times 10^2$.

× D'autre part :

$$\frac{e^e}{1 - e^{-3}} = e^3 \frac{e^e}{e^3 - 1} < 27 \frac{e^e}{e^3 - 1}$$

et donc il suffit de montrer que :

$$\frac{e^e}{e^3 - 1} \leq 1$$

Or :

$$\frac{e^e}{e^3 - 1} \leq 1 \iff e^e \leq e^3 - 1 \iff 1 \leq e^3 - e^e$$

et puisque $2,7 \leq e \leq 2,72$, il suit que $e^e \geq 4$ et $3 - e \geq 0,25 = \frac{1}{4}$. D'où, par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant) :

$$e^3 - e^e = \int_e^3 e^x dx \geq (3 - e)e^e \geq 4(3 - e) \geq 1$$

c) On complète le programme **Python** de la manière suivante :

```

1 from numpy import exp, abs
2
3 u = -3 + np.exp(1)
4 n = 1
5
6 while np.abs(u/(-4*n) - 1) >= .01:
7     u = u - 4 + np.exp(u)
8     n += 1
9 print(n)

```

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

- D'une part :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_k}) && \text{(par linéarité de l'espérance)} \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)
 \end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}(X) \\
 &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X = k]) \\
 &= \sum_{k=0}^n k \left(\mathbb{P}([X \geq k]) - \mathbb{P}([X \geq k+1]) \right) \\
 &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X \geq k]) - \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X \geq k+1]) \\
 &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X \geq k]) - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1) \mathbb{P}([X \geq k]) && \text{(par décalage d'indice)} \\
 &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}([X \geq k]) - \sum_{k=1}^{n+1} k \mathbb{P}([X \geq k]) + \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}([X \geq k]) && \text{(par linéarité de la somme)} \\
 &= 0 \times \mathbb{P}([X \geq 0]) + \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}([X \geq k]) - \left(\sum_{k=1}^n k \mathbb{P}([X \geq k]) + (n+1) \mathbb{P}([X \geq n+1]) \right) + \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}([X \geq k]) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X \geq k]) && \text{(car, comme } X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket : \\
 & && [X \geq n+1] = \emptyset) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k)
 \end{aligned}$$

Sujet Maths appliquées 1

Exercice sans préparation 2

On se donne $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi normale centrée réduite, $x \in \mathbb{R}$ un réel, et $\alpha \in]0; 1[$.

On étudie le processus aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par

$$X_0 = x$$

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \alpha X_n + \epsilon_n.$$

Étudier la convergence en loi de X_n .

Réponses de l'exercice sans préparation 2 :

- Exprimons les premières variables aléatoires X_n en fonction des ϵ_i :

$$X_0 = x$$

$$X_1 = \alpha x + \epsilon_0$$

$$X_2 = \alpha^2 x + \alpha \epsilon_0 + \epsilon_1$$

$$X_3 = \alpha^3 x + \alpha^2 \epsilon_0 + \alpha \epsilon_1 + \epsilon_2$$

On démontre alors par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \alpha^n x + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-1-i} \epsilon_i.$$

- D'après la formule précédente et par stabilité des lois normales par combinaisons linéaires (les ϵ_i sont bien indépendantes) puis par transformée affine, il suit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n \hookrightarrow \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$$

où $m_n = \alpha^n x$ et $\sigma_n = \left(\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha^2)^i \right)^{1/2}$.

- La série $\sum (\alpha^2)^n$ est une série géométrique de raison $q = \alpha^2 \in]0, 1[$, ainsi elle converge. On pose :

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha^2)^i \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

et on note $W \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

On remarque également que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = 0$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} F_{X_n}(y) &= \mathbb{P}(X_n \leq y) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{X_n - m_n}{\sigma_n} \leq \frac{y - m_n}{\sigma_n}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[X_n^* \leq \frac{y - m_n}{\sigma_n}\right]\right) \\ &= \Phi\left(\frac{y - m_n}{\sigma_n}\right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right) && \text{(par continuité de } \Phi \text{ sur } \mathbb{R}) \\ &= F_W(y) \end{aligned}$$

On peut donc conclure que : $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} W$.