Planches HEC

Sujet E 76

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Dans cet exercice, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ *et admettent une densité.*

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$. On note respectivement F et f, la fonction de répartition et une densité de X.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

2. Pour $x \geqslant 0$:

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt$.

b) Établir les inégalités : $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt \geqslant x(1-F(x)) \geqslant 0$.

c) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-F(t))\,dt$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, G_n la fonction de répartition de Z_n et g_n une densité de Z_n.

a) Exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_n(t)$ en fonction de $F(t)$.

b) Établir l'existence de $\mathbb{E}(Z_n)$.

c) Pour $n \geqslant 2$, montrer que : $\mathbb{E}(Z_n) - \mathbb{E}(Z_{n-1}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (F(t))^{n-1}(1-F(t))\,dt$.

d) Soit $m > 0$. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre m (d'espérance $\dfrac{1}{m}$).
Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$.
Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et X une matrice colonne non nulle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On pose : $A = X\,{}^tX$.

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soit X une variable aléatoire à densité. La fonction de répartition de X est la fonction F_X définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x])$$

Elle a comme propriétés :

- F_X est continue sur $\mathbb{R}$
- F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

2. a) Soit $x \geqslant 0$. Par hypothèse, X admet une espérance donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt$ converge absolument. Ceci implique que l'intégrale $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} tf(t)\ dt$ converge.

b) Soit $x \geqslant 0$. On a $F(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) \in [0,1]$ donc $1 - F(x) \geqslant 0$. D'où $x(1-F(x)) \geqslant 0$.
D'autre part, pour tout $t \geqslant x$, on a $tf(t) \geqslant xf(t)$ (car $f(t) \geqslant 0$) donc par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$\int_x^{+\infty} tf(t)\ dt \geqslant \int_x^{+\infty} xf(t)\ dt = x\int_x^{+\infty} f(t)\ dt = x(1-F(x))$$

D'où

$$\boxed{\int_x^{+\infty} tf(t)\ dt \geqslant x(1-F(x)) \geqslant 0.}$$

c) Par hypothèse, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ donc on peut considérer que f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} tf(t)\ dt$$

Soit $x \geqslant 0$. On procède par intégration par parties :

$$\left| \begin{array}{ll} u'(t) = f(t) & u(t) = F(t) - 1 \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^x tf(t)\ dt &= \Big[\ t(F(t)-1)\ \Big]_0^x - \int_0^x (F(t)-1)\ dt \\ &= x(F(x)-1) + \int_0^x (1-F(t))\ dt \end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^x (1-F(t))\ dt = \int_0^x tf(t)\ dt + x(1-F(x))$$

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x tf(t)\ dt = \mathbb{E}(X)$. On sait aussi que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} tf(t)\ dt = 0$ donc, d'après la question ***2.b)*** et par théorème d'encadrement, il vient que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(1-F(x)) = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x (1-F(t))\ dt = \mathbb{E}(X)$.

Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1-F(t))\ dt.}$$

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
G_n(t) &= \mathbb{P}([\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leqslant t]) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant t]\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k \leqslant t]) && \textit{(par indépendance)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X \leqslant t]) && \textit{(car les } X_k \textit{ suivent la même loi que } X\textit{)} \\
&= F(t)^n
\end{aligned}$$

b) La fonction G_n est de même régularité que F donc Z_n est une variable aléatoire à densité. On détermine une densité g_n de Z_n en dérivant G_n sur les intervalles ouverts où elle est de classe $\mathcal{C}^1$, *i.e.* $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$:

$$g_n(t) = \begin{cases} nf(t)F(t)^{n-1} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

On complète la définition de g_n en posant $g_n(0) = 0$.

La variable aléatoire Z_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg_n(t)\ dt$ converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence pour ce calcul de moment. Or,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tg_n(t)\ dt = \int_{0}^{+\infty} tg_n(t)\ dt$$

car g_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

On remarque ensuite que, pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant ntf(t)F(t)^{n-1} \leqslant ntf(t)$ car $0 \leqslant F(t) \leqslant 1$.

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tf(t)\ dt$ converge par hypothèse donc par critère de comparaison par inégalité pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tg_n(t)\ dt$ converge aussi. On peut alors conclure que

$$\boxed{Z_n \text{ admet une espérance.}}$$

c) Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) - \mathbb{E}(Z_{n-1}) &= \int_{0}^{+\infty} (1 - G_n(t))\ dt - \int_{0}^{+\infty} (1 - G_{n-1}(t))\ dt && \textit{(cf question \textbf{2.c)})} \\
&= \int_{0}^{+\infty} (G_{n-1}(t) - G_n(t))\ dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} (F(t)^{n-1} - F(t)^n)\ dt && \textit{(cf question \textbf{3.a)})} \\
&= \int_{0}^{+\infty} (F(t))^{n-1}(1 - F(t))\ dt
\end{aligned}$$

d) Soit $k \geqslant 2$. Soit $B \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\int_0^B (F(t))^{k-1}(1-F(t))\ dt &= \int_0^B (1-\mathrm{e}^{-mt})^{k-1}\mathrm{e}^{-mt}\ dt \\ &= \frac{1}{m}\int_0^B m\mathrm{e}^{-mt}(1-\mathrm{e}^{-mt})^{k-1}\ dt \\ &= \frac{1}{m}\left[\frac{(1-\mathrm{e}^{-mt})^k}{k}\right]_0^B \\ &= \frac{1}{mn}(1-\mathrm{e}^{-mB})^k\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{B\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-mB} = 1$ donc

$$\mathbb{E}(Z_k) - \mathbb{E}(Z_{k-1}) = \frac{1}{mk}$$

Soit $n \geqslant 2$. On somme l'égalité précédente pour k variant de 2 à n. On obtient par télescopage :

$$\mathbb{E}(Z_n) - \mathbb{E}(Z_1) = \sum_{k=2}^n \mathbb{E}(Z_k) - \mathbb{E}(Z_{k-1}) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{mk} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{mk}$$

Or, $\mathbb{E}(Z_1) = \dfrac{1}{m}$ donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{mk} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\ dt \leqslant \frac{1}{k}$$

donc par sommation on obtient

- d'une part : $\ln(n+1) = \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\ dt \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
- d'autre part : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t}\ dt = \ln(n)$

ce qui donne

$$\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$$

Par théorème d'encadrement :

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n) \text{ et } \mathbb{E}(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{m}\ln(n).}$$

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

1. La matrice A est symétrique par construction donc elle est diagonalisable.

2. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A.

On remarque que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $C_k = x_k X$. Puisque $X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, il vient que $\text{rg}(A) = 1$.
Par théorème du rang : $\dim(E_0(A)) = n - 1$.
On remarque aussi que $AX = X({}^tXX) = \alpha X$ où

$$\alpha = {}^tXX = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \neq 0$$

donc α est valeur propre de A et $\dim(E_\alpha(A)) = 1$ puisque

$$n - 1 + \dim(E_\alpha(A)) \leqslant n$$

Ainsi, $E_\alpha(A) = \text{Vect}\,(X)$.

Déterminons maintenant $E_0(A)$. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} AY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} &\iff X({}^tXY) = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \beta X = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} && \textit{(où } \beta = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\textit{)} \\ &\iff \beta = 0 && \textit{(car } X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\textit{)} \\ &\iff \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = 0 \end{aligned}$$

Il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_{i_0} \neq 0$. On en déduit que

$$AY = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff y_{i_0} = -\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i_0}} \frac{x_k}{x_{i_0}} y_k$$

Sujet Maths appliquées 1

Exercice avec préparation 2

Soit m un réel strictement positif et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$. Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ on pose $g^0 = \text{id}$ et, pour tout k appartenant à $\mathbb{N}^*$, $g^k = g \circ g^{k-1}$.

1. Question de cours : critère de diagonalisabilité d'une matrice selon les sous-espaces propres.

2. ***a)*** Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire de M et de I. En déduire un polynôme annulateur non nul de M.

b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. Soient p et q les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par $p = \dfrac{1}{3}(f + \text{id})$ et $q = -\dfrac{1}{3}(f - 2\text{id})$.

a) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, p^n et q^n.

b) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de f^n en fonction de p et q.

c) Déterminer deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, $M^n = a_n I + b_n M$.

d) Cette dernière formule reste-t-elle valable si n appartient à $\mathbb{Z}$?

Exercice sans préparation 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et ε une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. X et ε sont supposées indépendantes.

1. Ecrire un script **Python** permettant de simuler 1000 réalisations de la variable aléatoire $Y = \varepsilon X$ et d'en afficher une représentation.

2. Trouver la loi de Y.

Réponses de l'exercice avec préparation 2 :

1. Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n.

2. a)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 2 & 1/m \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix} = M + 2I$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } P(x) = x^2 - x - 2 \text{ est un polynôme annulateur de } M.}$$

b) Tout d'abord, on remarque que $P(x) = (x-2)(x+1)$. On en déduit que les valeurs propres possibles de M sont 2 et -1.

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} U \in E_{-1}(M) &\iff (M+I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 1 & 1/m \\ m^2 & m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x & + & \frac{1}{m} y & + & \frac{1}{m^2} z & = 0 \\ mx & + & y & + & \frac{1}{m} z & = 0 \\ m^2 x & + & my & + & z & = 0 \end{array} \right. \\ &\iff m^2 x + my + z = 0 \qquad \textit{(car les trois lignes sont proportionnelles)} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} E_{-1}(M) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = -m^2 x - my \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -m^2 x - my \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix} \right) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\} \end{aligned}$$

donc -1 est valeur propre de M.

De plus, la famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_{-1}(M)$,

× est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

On en déduit que $\mathcal{F}_{-1}$ est une base de $E_{-1}(M)$ et $\dim(E_{-1}(M)) = 2$.

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
U \in E_2(M) &\iff (M-2I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} -2 & 1/m & 1/m^2 \\ m & -2 & 1/m \\ m^2 & m & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} -2x & +\frac{1}{m}y & +\frac{1}{m^2}z & = 0 \\ mx & -\ 2y & +\ \frac{1}{m}z+ & = 0 \\ m^2x & +my & -\ \ 2z+ & = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} -2x & +\ \frac{1}{m}y & +\frac{1}{m^2}z & = 0 \\ & -\ \ 3y & +\ \frac{3}{m}z & = 0 \\ & 3my & -\ \ 3z & = 0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 + mL_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + m^2L_1 \end{array} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} -2x & +\frac{1}{m}y & +\frac{1}{m^2}z & = 0 \\ & y & -\ \frac{1}{m}z & = 0 \end{array} \right. & \textit{(car } L_3 = -mL_2\textit{)} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrl} -2x & +\frac{1}{m}y & = -\frac{1}{m^2}z \\ & y & = \frac{1}{m}z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrl} -2mx & & = -\frac{2}{m}z \\ & y & = \frac{1}{m}z \end{array} \right. & \textit{(} L_2 \leftarrow mL_2 - L_3\textit{)} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrl} x & & = \frac{1}{m^2}z \\ & y & = \frac{1}{m}z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
E_2(M) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = \frac{1}{m^2}z, y = \frac{1}{m}z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{m^2}z \\ \frac{1}{m}z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{m^2} \\ \frac{1}{m} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix} \right) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}
\end{aligned}$$

donc 2 est valeur propre de M.

De plus, la famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_2(M)$,

× est libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

On en déduit que $\mathcal{F}_2$ est une base de $E_2(M)$ et $\dim(E_2(M)) = 1$.

On a donc

$$\dim(E_2(M)) + \dim(E_{-1}(M)) = 1 + 2 = 3$$

et on peut conclure que la matrice M est diagonalisable.

Plus précisément, notons $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -m^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -m \end{pmatrix} \right)$. Par théorème de concaténation, la famille $\mathcal{B}$ est libre. De plus, $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$. Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M.

3. Soient p et q les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par $p = \dfrac{1}{3}(f + \text{id})$ et $q = -\dfrac{1}{3}(f - 2\text{id})$.

a) Notons D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On note ensuite P (resp. Q) la matrice de p (resp. q) dans la base $\mathcal{B}$. On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que $PQ = QP = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$\boxed{\text{On en déduit, par passerelle matrice-endomorphisme, que } p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(()\mathbb{R}^3)}.}$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^n = P$ et $Q^n = Q$.

$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } n \in \mathbb{N},\ p^n = p \text{ et } q^n = q.}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = 2^n P + (-1)^n Q$$

$\boxed{\text{Par passerelle matrice-endomorphisme : } f^n = 2^n p + (-1)^n q.}$

c) Notons $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation précédente et par passerelle matrice-endomorphisme :

$$\begin{aligned} M^n &= 2^n \text{Mat}_{\mathcal{E}}(p) + (-1)^n \text{Mat}_{\mathcal{E}}(q) \\ &= 2^n \frac{1}{3}(M + I) - (-1)^n \frac{1}{3}(M - 2I) \\ &= \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} M + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I \end{aligned}$$

$$\boxed{M^n = a_n I + b_n M \text{ où } a_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \text{ et } b_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}.}$$

d) Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$: « $M^{-k} = a_{-k} I + b_{-k} M$ »
<u>Initialisation</u> :
On sait que $M^2 = M + 2I$. On en déduit que :

$$M \left(\frac{1}{2} M - \frac{1}{2} I \right) = I$$

et donc M est inversible d'inverse $M^{-1} = \dfrac{1}{2} M - \dfrac{1}{2} I$. Or, on a bien $a_{-1} = -\dfrac{1}{2}$ et $b_{-1} = \dfrac{1}{2}$. Donc la formule reste valable pour $n = -1$. D'où $\mathcal{P}(1)$.
<u>Hérédité</u> : soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(k)$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\begin{aligned}
M^{-(k+1)} &= M^{-k}M^{-1} \\
&= (a_{-k}I + b_{-k}M)\, M^{-1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= (a_{-k}I + b_{-k}M) \left(\frac{1}{2}M - \frac{1}{2}I\right) && \textit{(d'après } \mathcal{P}(1)\textit{)} \\
&= \frac{b_{-k}}{2}M^2 + \frac{a_{-k} - b_{-k}}{2}M - \frac{a_{-k}}{2}I \\
&= \frac{b_{-k}}{2}(M + 2I) + \frac{a_{-k} - b_{-k}}{2}M - \frac{a_{-k}}{2}I && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{a_{-k}}{2}M + \left(b_{-k} - \frac{a_{-k}}{2}\right) I
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{a_{-k}}{2} &= \frac{\dfrac{2^{-k} + 2(-1)^{-k}}{3}}{2} \\
&= \frac{2^{-k-1} + (-1)^{-k}}{3} \\
&= \frac{2^{-(k+1)} - (-1)^{-(k+1)}}{3} \\
&= b_{-(k+1)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b_{-k} - \frac{a_{-k}}{2} &= \frac{2^{-k} - (-1)^{-k}}{3} - \frac{2^{-k-1} + (-1)^{-k}}{3} \\
&= \frac{2^{-k} - 2^{-(k+1)} - 2(-1)^{-k}}{3} \\
&= \frac{2^{-(k+1)} + 2(-1)^{-(k+1)}}{3} \\
&= a_{-(k+1)}
\end{aligned}$$

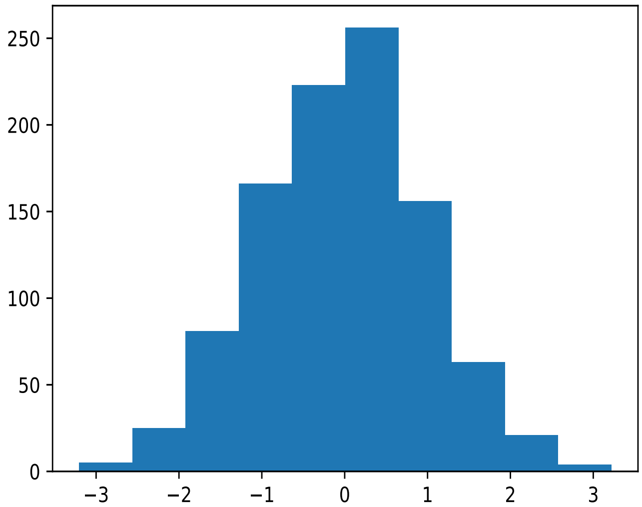
D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

Réponses de l'exercice sans préparation 2 :

1. On propose d'en afficher une représentation sous forme d'histogramme :

```
n = 1000
def simu_epsilon():
    if rd.random() < 1/2:
        eps = -1
    else:
        eps = 1
    return eps

Epsilon = [simu_epsilon() for k in range(n)]
X = rd.normal(0,1,n)
Y = Epsilon * X
plt.hist(Y)
plt.show()
```



2. Puisque $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et $\varepsilon(\Omega) = \{-1, 1\}$, il suit que $Y(\Omega) = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $([\varepsilon = -1], [\varepsilon = 1])$:

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}([\varepsilon X \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}([\varepsilon X \leqslant x] \cap [\varepsilon = -1]) + \mathbb{P}([\varepsilon X \leqslant x] \cap [\varepsilon = 1]) \\
&= \mathbb{P}([-X \leqslant x] \cap [\varepsilon = -1]) + \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [\varepsilon = 1]) \\
&= \mathbb{P}([X \geqslant -x])\mathbb{P}([\varepsilon = -1]) + \mathbb{P}([X \leqslant x])\mathbb{P}([\varepsilon = 1]) && \textit{(par indépendance)} \\
&= \frac{1}{2}(1 - \Phi(-x)) + \frac{1}{2}\Phi(x) \\
&= \frac{1}{2}(1 - (1 - \Phi(x))) + \frac{1}{2}\Phi(x) \\
&= \Phi(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, Y et X admettent la même fonction de répartition. Puisque la fonction de répartition caractérise la loi, il suit que

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi et donc : } Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).}$$

3. *Question supplémentaire : le résultat obtenu reste-t-il valable si X suit une loi normale centrée quelconque ?*
Dans ce cas, on a $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ où $\sigma > 0$ et $X = \sigma X^*$ où $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les calculs précédents donnent :

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}([X \geqslant -x]) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([X \leqslant x]) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\left[X^* \geqslant -\frac{x}{\sigma}\right]) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(\left[X^* \leqslant \frac{x}{\sigma}\right]) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \Phi\left(-\frac{x}{\sigma}\right)\right) + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \\
&= F_X(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{A nouveau : } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi.}}$$

Sujet Maths appliquées 2

Exercice avec préparation 3

On considère un entier naturel $n \geqslant 3$, un entier naturel impair $N \geqslant 3$ et un réel $S > 0$.
On note $N = 2p + 1$.
Un jeu oppose n joueurs $J_1, \dots, J_n$. Le jeu consiste à lancer N fois une pièce équilibrée par une machine. Avant les lancers, chaque joueur prédit le résultat de chaque lancer. Sont déclarés gagnants les joueurs ayant obtenu le plus grand nombre de prévisions correctes (dans l'ordre) ; ils se partagent la somme de S euros.
Par exemple, si $N = 3$ et si les lancers donnent PFP, un joueur ayant prédit FFP aura deux prévisions correctes.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k le nombre de prévisions correctes du joueur J_k et G_k son gain.

1. Cours : énoncer la formule du binôme de Newton.

2. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}(G_k) = \dfrac{S}{n}$.

3. Écrire en **Python** une fonction `jeu` simulant le jeu et renvoyant une liste de n nombres représentant le gain de chaque joueur.

4. On suppose que les joueurs J_1 et J_2 adoptent la stratégie suivante : le joueur J_1 choisit les prévisions contraires à celles du joueur J_2 (qui choisit ses prévisions au hasard). Les joueurs J_1 et J_2 décident de partager leur gain à l'issue du jeu.

   Par exemple, si $N = 3$ et si le joueur J_2 choisit PPF, le joueur J_1 choisit FFP.

   Les autres joueurs jouent indépendamment des deux joueurs J_1 et J_2. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_3, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, tout comme les variables aléatoires $X_2, X_3, \dots, X_n$.

   On note $Y = \max(X_1, X_2)$ et $H = G_1 + G_2$.

   a) Justifier que toutes les variables aléatoires X_k suivent une même loi à déterminer.
   Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note $q_i = \mathbb{P}(X_k = i)$ et $f_i = \mathbb{P}(X_k \leqslant i)$.

   b) Déterminer l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y.

   c) Justifier que $f_p = \dfrac{1}{2}$.

   d) Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$ et $i \in Y(\Omega)$, montrer que :

$$\mathbb{P}\left(H = \frac{S}{j}, Y = i\right) = 2\binom{n-2}{j-1} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j}.$$

   e) En déduire $\mathbb{E}(H)$, $\mathbb{E}(G_1)$ et $\mathbb{E}(G_2)$. La stratégie des joueurs J_1 et J_2 est-elle avantageuse ?

Exercice sans préparation 3

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$.

Réponses de l'exercice avec préparation 3 :

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2. Par symétrie des rôles, les variables aléatoires X_k (resp. G_k) suivent la même loi. Toutes les variables aléatoires étant finies, elles admettent une espérance. On en déduit que :

$$\mathbb{E}(G_1) = \mathbb{E}(G_2) = \cdots = \mathbb{E}(G_n)$$

De plus, d'après le principe du jeu :

$$\sum_{k=1}^{n} G_k = S$$

En passant à l'espérance, on obtient, pour $k \in [\![1,n]\!]$ fixé :

$$n\mathbb{E}(G_k) = S$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{E}(G_k) = \frac{S}{n}.}$$

3. • On propose d'abord une fonction **Python** qui simule entièrement le jeu, y compris les lancers de la pièce par la machine

```
def jeu(n, N, S):
    X = [0 for k in range(n)] # nombre de prévisions correctes des joueurs
    for i in range(N):
        lancer = rd.randint(0,2) # lancer numéro i de la pièce par la machine
        for k in range(n):
            if rd.randint(0,2) == lancer: # si le joueur k a réussi sa prévision
                X[k] += 1
    m = max(X) # nombre maximal de prévisions correctes
    gagnants = [] # liste des joueurs gagnants
    for k in range(n):
        if X[k] == m: # si le joueur k est gagnant
            gagnants.append(k)
    gain = S / len(gagnants)
    G = [0 for k in range(n)] # liste des gains des joueurs
    for k in gagnants:
        G[k] = gain
    return G
```

• Solution moins dans l'esprit du sujet. Les variables aléatoires X_k sont indépendantes et suivent toutes la loi $\mathcal{B}\left(N, \frac{1}{2}\right)$. Simuler le jeu revient à simuler les X_k, puis à compter combien il y a de gagnants puis à leur partager la somme S de manière équitable.

```python
def jeubis(n, N, S):
    nbPrevisionsJoueurs = rd.binomial(N, 1/2, n)
    maxPrevisions = max(nbPrevisionsJoueurs)
    nbGagnants = 0
    for k in range(n):
        if nbPrevisionsJoueurs[k] == maxPrevisions:
            nbGagnants += 1
    listeGains = []
    for k in range(n):
        if nbPrevisionsJoueurs[k] == maxPrevisions:
            listeGains.append(S/nbGagnants)
        else:
            listeGains.append(0)
    return listeGains
```

4. a) • Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Pour le joueur k, l'expérience consiste en une répétition de N épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de paramètre $\frac{1}{2}$ (le succès étant : « faire la bonne prédiction »).

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![2, n]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \tfrac{1}{2}\right).}$$

• Ensuite, $X_1 = N - X_2$, c'est-à-dire que X_1 est égale au nombre d'échecs du joueur J_2. Puisque la pièce est équilibrée, le fait de compter les succès ou les échecs donne la même loi.

$$\boxed{\text{D'où } X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \tfrac{1}{2}\right).}$$

b) $X_1 = N - X_2$ donc $Y = \max(N - X_2, X_2)$ d'où

$$Y(\Omega) = \{\max(N-k, k) \mid k \in [\![0, N]\!]\}$$

Or, $N - k = k \iff 2k = N \iff k = \dfrac{N}{2}$ mais N est impair.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y(\Omega) = [\![\tfrac{N+1}{2}, N]\!] = [\![p+1, 2p+1]\!].}$$

c)

$$\begin{aligned}
f_p &= \mathbb{P}([X_k \leqslant p]) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[X_k \leqslant \frac{N-1}{2}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[N - X_k \leqslant \frac{N-1}{2}\right]\right) && \textit{(car } X_k \textit{ et } N - X_k \textit{ suivent la même loi)} \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{N+1}{2} \leqslant X_k\right]\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\left[\frac{N+1}{2} > X_k\right]\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\left[X_k \leqslant \frac{N-1}{2}\right]\right) \\
&= 1 - f_p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } f_p = \frac{1}{2}.}$$

d) • Soit $i \in Y(\Omega)$. Tout d'abord, rappelons que $X_1 = N - X_2$. Ainsi, puisque N est impair, X_1 et X_2 ne peuvent pas prendre la même valeur. De plus, si X_2 (resp. X_1) prend la valeur i, alors X_1 (resp. X_2) prend une valeur strictement inférieure à i. On en déduit que :

$$[Y = i] = [X_1 = i] \cup [X_2 = i]$$

et les événements $[X_1 = i]$ et $[X_2 = i]$ sont incompatibles.

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}([Y = i]) = 2q_i \neq 0.}$$

• Soit $i \in Y(\Omega)$ et soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. D'après ce qui précède, on peut écrire que :

$$\mathbb{P}\left(H = \frac{S}{j}, Y = i\right) = \mathbb{P}([Y = i])\mathbb{P}_{[Y=i]}\left(\left[H = \frac{S}{j}\right]\right) = 2q_i\mathbb{P}_{[Y=i]}\left(\left[H = \frac{S}{j}\right]\right)$$

Supposons l'événement $[Y = i]$ réalisé. Dans ce cas :

$\left[H = \dfrac{S}{j}\right]$ est réalisé $\Longleftrightarrow$ Il y a j gagnants en tout `ET` l'un des j gagnants est J_1 ou J_2

$\Longleftrightarrow$ Il y a j gagnants en tout `ET` le nombre maximal de prévisions correctes est i

$\Longleftrightarrow$ Le nombre maximal de prévisions correctes est i `ET` il y a $j-1$ gagnants parmi les joueurs $J_3, \dots, J_n$

$\Longleftrightarrow$ $j-1$ joueurs parmi $J_3, \dots, J_n$ obtiennent i prévisions correctes `ET` $(n-2)-(j-1) = n-1-j$ joueurs parmi $J_3, \dots, J_n$ obtiennent moins de $i-1$ prévisions correctes

Ainsi, par indépendance des choix des joueurs $J_3, \dots, J_n$:

$$\mathbb{P}_{[Y=i]}\left(\left[H = \frac{S}{j}\right]\right) = \binom{n-2}{j-1} q_i^{j-1} f_{i-1}^{n-1-j}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}\left(H = \frac{S}{j}, Y = i\right) = 2\binom{n-2}{j-1} q_i^{j} f_{i-1}^{n-1-j}.}$$

e) Tout d'abord, remarquons que $H(\Omega) = \{0\} \cup \{\frac{S}{j} \mid j \in [\![1, n-1]\!]\}$ (il ne peux pas y avoir n gagnants puisque J_1 et J_2 ne peuvent pas gagner simultanément).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H) &= 0 \times \mathbb{P}([H=0]) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{S}{j}\mathbb{P}\left(\left[H = \frac{S}{j}\right]\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{S}{j} \sum_{i \in Y(\Omega)} \mathbb{P}\left(H = \frac{S}{j}, Y = i\right) && \textit{(Formule des probabilités totales avec le sce associé à } Y\textit{)} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{S}{j} \sum_{i=p+1}^{2p+1} 2\binom{n-2}{j-1} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j} \\
&= 2S \sum_{i=p+1}^{2p+1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}\binom{n-2}{j-1} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j} \\
&= 2S \sum_{i=p+1}^{2p+1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n-1}\binom{n-1}{j} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j} && \textit{(formule du capitaine)} \\
&= \frac{2S}{n-1} \sum_{i=p+1}^{2p+1} \left((q_i + f_{i-1})^{n-1} - f_{i-1}^{n-1}\right) && \textit{(binôme de Newton)} \\
&= \frac{2S}{n-1} \sum_{i=p+1}^{2p+1} \left(f_i^{n-1} - f_{i-1}^{n-1}\right) \\
&= \frac{2S}{n-1} \left(1 - f_p^{n-1}\right) && \textit{(par télescopage)} \\
&= \frac{2S}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.c)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de J_1 et J_2 : $\mathbb{E}(G_1) = \mathbb{E}(G_2)$. De plus, $H = G_1 + G_2$ donc

$$\mathbb{E}(G_1) = \mathbb{E}(G_2) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(H) = \frac{S}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Comparons maintenant les deux espérances selon la stratégie choisie :

$$\begin{aligned}
\frac{S}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) > \frac{S}{n} &\iff 1 - \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{n-1}{n} \\
&\iff 1 - \frac{n-1}{n} > \frac{1}{2^{n-1}} \\
&\iff \frac{1}{n} > \frac{1}{2^{n-1}} \\
&\iff n < 2^{n-1}
\end{aligned}$$

ce qui est vrai pour tout entier $n \geqslant 3$ par récurrence immédiate.

$$\boxed{\text{La stratégie des joueurs } J_1 \text{ et } J_2 \text{ est donc avantageuse.}}$$

Réponses de l'exercice sans préparation 3 :

- On commence par montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ est convergente.

  $\times$ les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont continues et positives sur $[x, +\infty[$

  $\times$ $\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

  $\times$ l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge par critère de Riemann

  Par critère de négligeabilité pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives, on en déduit que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ est convergente.

- Soit $x \geqslant 1$ et soit $B \geqslant x$. On remarque que :

$$\int_x^B \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \int_x^B \frac{-1}{2t}(-2t\mathrm{e}^{-t^2})\, dt$$

  On procède par IPP :

$$\left|\begin{array}{ll} u'(t) = -2t\mathrm{e}^{-t^2} & u(t) = \mathrm{e}^{-t^2} \\ v(t) = \dfrac{-1}{2t} & v'(t) = \dfrac{1}{2t^2} \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, B]$. On a alors :

$$\int_x^B \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \left[\frac{-1}{2t}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_x^B - \int_x^B \frac{1}{2t^2}\mathrm{e}^{-t^2}\, dt = -\frac{\mathrm{e}^{-B^2}}{2B} + \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \int_x^B \frac{1}{2t^2}\mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

  $\times$ $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-B^2}}{2B} = 0$

  $\times$ $\displaystyle\int_x^B \frac{1}{2t^2}\mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \frac{\mathrm{e}^{-B^2}}{2B} - \int_x^B \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ et tous les termes à droite admettent une limite lorsque B tend vers $+\infty$, donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}\mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ est convergente

  En passant à la limite lorsque B tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}\mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

  De plus, par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}\mathrm{e}^{-t^2}\, dt \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{1}{2x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2x^2}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

  On en déduit, par théorème d'encadrement, que :

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}\mathrm{e}^{-t^2}\, dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt\right)$$

$$\boxed{\text{D'où l'équivalent : } \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}.}$$

Question supplémentaire : En déduire, pour $0 < a < b$, la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b e^{-nt^2}\,dt\right)^{\frac{1}{n}}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left(\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{-nt^2}\,dt\right)^{\frac{1}{n}}$ et $J_n = \displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{-nt^2}\,dt$, de sorte que $I_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(J_n)}$.

On pose également, pour tout $x \geqslant 1$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$.

On effectue le changement de variable affine $\sqrt{n}t = u$:

$$\begin{aligned}
J_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2}\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\varphi(a\sqrt{n}) - \varphi(b\sqrt{n})\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\mathrm{e}^{-na^2}}{2a\sqrt{n}} - \frac{\mathrm{e}^{-nb^2}}{2b\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-na^2}}{2an} \left(1 - \frac{a}{b}\mathrm{e}^{-n(b^2-a^2)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\mathrm{e}^{-na^2}\right)\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-na^2}}{2an} \left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
I_n &= \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{-na^2}}{2an}\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\left(-na^2-\ln(2an)+\ln\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)\right)} \\
&= \mathrm{e}^{-a^2-\frac{\ln(2an)}{n}+\frac{1}{n}\ln\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)}
\end{aligned}$$

Or,

× $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2an)}{n} = 0$ par croissances comparées

× $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) = 0$

$$\boxed{\text{Par continuité de l'exponentielle : } \lim_{n\to+\infty} I_n = \mathrm{e}^{-a^2}.}$$

Sujet Maths appliquées 5

Exercice avec préparation 4

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite.
On note respectivement φ et Φ la densité continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction de répartition de cette loi.

1. Cours : Énoncer le théorème d'intégration par parties.

2. Donner sans justification la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$.

3. Montrer que $Z = \max(X, Y)$ est une variable aléatoire à densité. Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x)$$

4. ***a)*** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$

c) En déduire que Z admet une espérance et donner sa valeur.

5. ***a)*** Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

b) En déduire la variance de Z.

Exercice sans préparation 4

Un graphe est dit *régulier* s'il est simple et si tous ses sommets ont le même degré. Ce degré commun est alors appelé le degré du graphe régulier.

1. Ecrire le code **Python** d'une fonction `regulier(M)` qui prend en entrée la matrice d'adjacence d'un graphe simple et qui renvoie un booléen égal à `True` si le graphe est régulier, à `False` sinon.

2. Déterminer les graphes réguliers de degré 0, 1 et 2.

3. Soit G un graphe régulier de degré 3. Que dire du nombre de sommets de G ?

Réponses de l'exercice avec préparation 4 :

1. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = \left[\ u(x)v(x)\ \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx$$

2. On remarque que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$ est le moment d'ordre 0 d'une variable aléatoire $W \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\boxed{\text{D'où : } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt = \sqrt{\pi}}$$

3. Tout d'abord, $Z(\Omega) = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant x])\mathbb{P}([Y \leqslant x]) && \textit{(par indépendance)} \\ &= \Phi(x)^2 \end{aligned}$$

La fonction de répartition F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc Z est à densité.
On dérive F_Z sur $\mathbb{R}$ pour obtenir une densité, en se souvenant que $\Phi' = \varphi$.

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto 2\varphi(x)\Phi(x) \text{ est une densité de } Z.}$$

4. a) La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = -x\varphi(x)}$$

b) Tout d'abord,

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\ dx = 2\int_0^{+\infty} x\varphi(x)\Phi(x)\ dx = -2\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)\ dx$$

Soit $B \geqslant 0$. On procède par IPP :

$$\left|\begin{array}{ll} u'(x) = \varphi'(x) & u(x) = \varphi(x) \\ v(x) = \Phi(x) & v'(x) = \varphi(x) \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,B]$.

$$\begin{aligned} \int_0^B \varphi'(x)\Phi(x)\ dx = \left[\ \varphi(x)\Phi(x)\ \right]_0^B - \int_0^B \varphi(x)^2\ dx \\ &= \varphi(B)\Phi(B) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{2} - \int_0^B \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\right)^2\ dx \\ &= \varphi(B)\Phi(B) - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} - \int_0^B \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\ dx \\ &= \varphi(B)\Phi(B) - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2\pi}\int_0^B \mathrm{e}^{-x^2}\ dx \end{aligned}$$

De plus,

× $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \varphi(B) = 0$

× $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \Phi(B) = 1$

× $\lim\limits_{B\to+\infty} \displaystyle\int_0^B \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$ (intégrale convergente d'après la question *2*)

Par passage à la limite lorsque $B \to +\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)\, dx = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$

En multipliant par -2, on obtient le résultat souhaité :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} xf(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx}$$

c) En faisant un calcul analogue, on a également :

$$\int_{-\infty}^0 xf(x)\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$

La variable aléatoire Z admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx$ est absolument convergente, ce qui revient à montrer la convergence pour ce calcul de moment.
On a montré précédemment que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xf(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\, dx$ sont toutes les deux convergentes donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx$ est convergente. De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^0 xf(x)\, dx + \int_0^{+\infty} xf(x)\, dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\sqrt{\pi} && \textit{(d'après la question 2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

5. a) Tout d'abord, $X^2(\Omega) = Z^2(\Omega) = \mathbb{R}^+$ donc, pour tout $x < 0$, $F_{X^2}(x) = F_{Z^2}(x) = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
F_{Z^2}(x) &= \mathbb{P}(\left[Z^2 \leqslant x\right]) \\
&= F_Z(\sqrt{x}) - F_Z(-\sqrt{x}) \\
&= \Phi^2(\sqrt{x}) - \Phi^2(-\sqrt{x}) \\
&= (\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}))(\Phi(\sqrt{x}) + \Phi(-\sqrt{x})) \\
&= \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) && \textit{(car } \Phi(-t) = 1 - \Phi(t)\textit{)} \\
&= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) \\
&= F_{X^2}(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les fonctions de répartition coïncident donc } X^2 \text{ et } Z^2 \text{ suivent la même loi.}}$$

b) La variable aléatoire X^2 admet une espérance donc Z admet un moment d'ordre 2, *i.e.* Z admet une variance. D'après Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \frac{1}{\pi} = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 - \frac{1}{\pi} = 1 - \frac{1}{\pi}$$

Réponses de l'exercice sans préparation 4 :

1. On propose la fonction suivante :

```
def regulier(M):
    n = len(M)
    deg = np.sum(M[0])
    for i in range(1,n):
        if np.sum(M[i]) != deg:
            return False
    return True
```

2. • Les graphes réguliers de degré 0 sont les graphes complètement déconnectés (il n'y a aucune arête reliant deux sommets).

• Les graphes réguliers de degré 1 sont les réunions déconnectées de paires de sommets reliés par une arête.

• Les graphes réguliers de degré 2 sont les réunions déconnectées de cycles.

3. Notons n le nombre de sommets du graphe et A le nombre d'arêtes.
Tout d'abord, il y a au moins 4 sommets (chaque sommet étant relié à trois autres sommets).

$$\boxed{n \geqslant 4}$$

Ensuite, d'après la formule d'Euler :

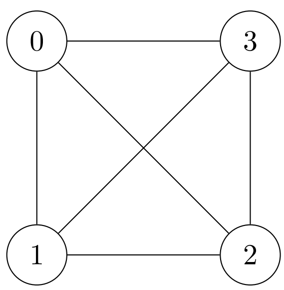
$$\sum_{x \in S} \deg(x) = 2A$$

où S est l'ensemble des sommets de notre graphe G. D'où $3n = 2A$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } n \text{ est pair.}}$$

4. *Question supplémentaire : démontrer la réciproque du résultat précédent.*
On se donne un entier $k \geqslant 2$ et on cherche à construire un graphe régulier de degré 3 possédant $2k$ sommets.

• Pour $k = 2$, une solution est fournie par le graphe complet à 4 sommets :



• Pour le cas général avec $k \geqslant 3$, on note les sommets $s_1, s_2, \dots, s_{2k}$ et on les sépare en deux moitiés : $\{s_1, \dots, s_k\}$ et $\{s_{k+1}, \dots, s_{2k}\}$.
Construction numéro 1 : on relie

× s_1 à s_{k+1}, s_{k+2} et s_{k+3} ;

× s_2 à s_{k+2}, s_{k+3} et s_{k+4} ;

× ...

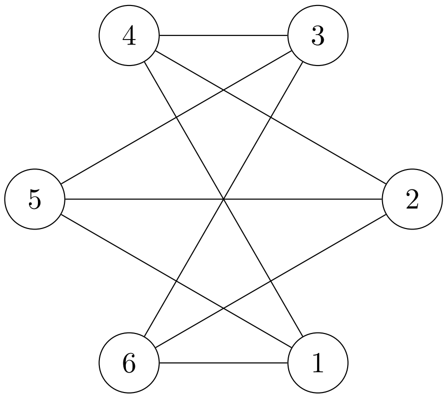
× s_{k-2} à s_{2k-2}, s_{2k-1} et s_{2k} ;

× s_{k-1} à s_{2k-1}, s_{2k} et s_{k+1} ;

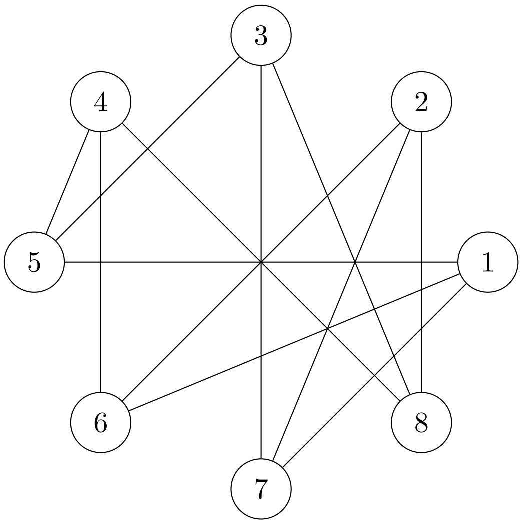
× s_k à s_{2k}, s_{k+1} et s_{k+2} ;

Il est assez facile de voir que tous les sommets $s_1, \ldots, s_k$ sont de degré 3. C'est un peu plus dur pour les sommets $s_{k+1}, \ldots, s_{2k}$, mais il suffit de se convaincre que chacun de ces sommets apparaît exactement trois fois dans la liste ci-dessus.

Représentons le graphe obtenu pour $k = 3$ et en numérotant les sommets de 1 à 6.



Représentons le graphe obtenu pour $k = 4$ et en numérotant les sommets de 1 à 8.



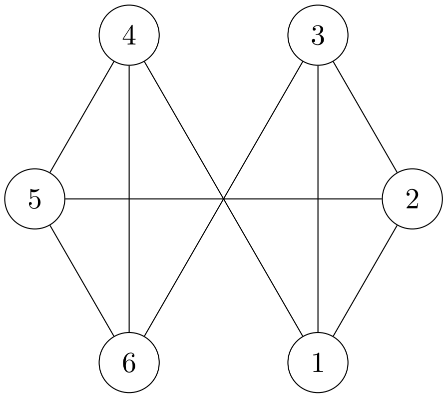
<u>Construction numéro 2 :</u>

× on crée un cycle en reliant s_1 à s_2, puis s_2 à s_3, ..., puis s_{k-1} à s_k et enfin s_k à s_1. Chacun de ces sommets possède deux arêtes dans ce cycle.

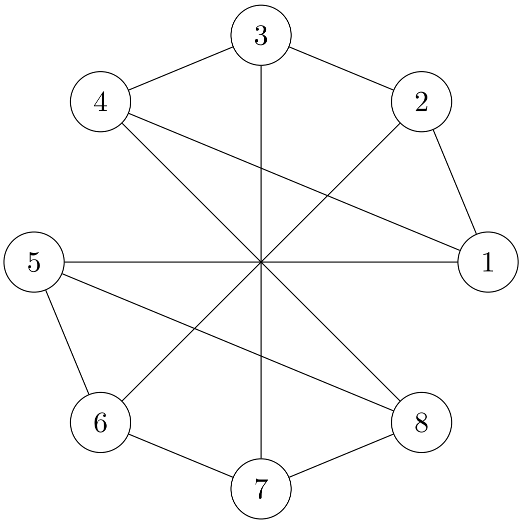
× on crée un cycle en reliant s_{k+1} à s_{k+2}, puis s_{k+2} à s_{k+3}, ..., puis s_{2k-1} à s_{2k} et enfin s_{2k} à s_{k+1}. Chacun de ces sommets possède deux arêtes dans ce cycle.

× pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on relie s_i et s_{k+i}. Ceci ajoute une troisième arête à chaque sommet et donc tous les sommets sont de degré 3.

Représentons le graphe obtenu pour $k = 3$ et en numérotant les sommets de 1 à 6.



Représentons le graphe obtenu pour $k = 4$ et en numérotant les sommets de 1 à 8.



Représentons le graphe obtenu pour $k = 5$ et en positionnant différemment les sommets numérotés de 1 à 10.