
Planches HEC

Sujet Maths appliquées 6

Exercice avec préparation 1

Un joueur dispose de N dés équilibrés. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de « six » obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de « six » obtenus et on répète l'expérience, définissant ainsi une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de « six » obtenus après n lancers.

1. Cours : formule des probabilités totales.
2. Écrire en **Python** une fonction prenant en argument deux entiers non nuls n et N et simulant une réalisation de la variable aléatoire S_n .
3. Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[S_n = k]$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n où $p_{n+1} = \frac{1 + 5p_n}{6}$.
5. Déterminer une expression de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
6. On note T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires à l'obtention des N « six ».
 - a) Écrire en **Python** une fonction prenant en argument un entier N non nul et simulant une réalisation de la variable aléatoire T .
 - b) Exprimer l'événement $[T = 1]$ à l'aide de la variable S_1 et, pour tout entier $n \geq 2$, exprimer l'événement $[T = n]$ à l'aide des variables aléatoires S_n et S_{n-1} .
 - c) En déduire la loi de T .

Exercice sans préparation 1

Soient $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_0^1 x^k f(x) dx = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins n fois sur $]0, 1[$.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements (où $I \subset \mathbb{N}$). Soit B un événement. Alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

Si de plus, pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

2. On propose la fonction **Python** suivante :

```

1 def simuS(n,N):
2     nbDés = N
3     S = 0
4     for k in range(n):
5         nbSix = rd.binomial(nbDés, 1/6)
6         nbDés = nbDés - nbSix
7         S = S + nbSix
8     return S

```

3. Soit $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Si l'événement $[S_n = k]$ est réalisé, alors à la $(n+1)^e$ étape on lance $N - k$ dés et X_{n+1} compte le nombre de « six » obtenus à cette étape.

L'expérience à cette étape consiste en une répétition de $N - k$ épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p = \frac{1}{6}$ (le succès étant « le dé tombe sur six »). La variable aléatoire X_{n+1} compte le nombre de succès.

La loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[S_n = k]$ est la loi binomiale de paramètres $N - k$ et $\frac{1}{6}$.

4. On définit la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par récurrence en posant :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{6} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{1 + 5p_n}{6} \end{cases}$$

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: « S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n »

Initialisation :

On a $S_1 = X_1$. La première étape de l'expérience consiste en une répétition de N épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p_1 = \frac{1}{6}$ (le succès étant « le dé tombe sur six »). La variable aléatoire X_1 compte le nombre de succès. Ainsi, on a bien $S_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{6}\right)$. D'où $\mathcal{P}(1)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Tout d'abord : $S_{n+1}(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket$.

Soit $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([S_n = k])_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(S_{n+1} = j) &= \sum_{k=0}^N \mathbb{P}([S_n = k] \cap [S_{n+1} = j]) \\
 &= \sum_{k=0}^N \mathbb{P}([S_n = k] \cap [S_n + X_{n+1} = j]) \\
 &= \sum_{k=0}^N \mathbb{P}([S_n = k] \cap [X_{n+1} = j - k]) \\
 &= \sum_{k=0}^j \mathbb{P}([S_n = k] \cap [X_{n+1} = j - k]) && \text{(car } j - k \in X_{n+1}(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket \text{ si et seulement si } 0 \leq k \leq j) \\
 &= \sum_{k=0}^j \mathbb{P}(S_n = k) \mathbb{P}_{[S_n=k]}(X_{n+1} = j - k) \\
 &= \sum_{k=0}^j \binom{N}{k} p_n^k (1 - p_n)^{N-k} \binom{N-k}{j-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{j-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-j} && \text{(car } S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p_n) \text{ par hypothèse de récurrence et d'après la question 3)}
 \end{aligned}$$

De plus :

$$\binom{N}{k} \binom{N-k}{j-k} = \frac{N!}{k! \cancel{(N-k)!} (j-k)! (N-j)!} = \frac{j!}{k! (j-k)!} \frac{N!}{j! (N-j)!} = \binom{j}{k} \binom{N}{j}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(S_{n+1} = j) &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \binom{N}{j} p_n^k (1 - p_n)^{N-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{j-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-j} \\
 &= \binom{N}{j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} p_n^k (1 - p_n)^{N-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{j-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-j} \\
 &= \binom{N}{j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} p_n^k (1 - p_n)^{j-k} (1 - p_n)^{N-j} \left(\frac{1}{6}\right)^{j-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-j} \\
 &= \binom{N}{j} \left(\frac{5}{6}(1 - p_n)\right)^{N-j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} p_n^k \left(\frac{1 - p_n}{6}\right)^{j-k}
 \end{aligned}$$

D'après le binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^j \binom{j}{k} p_n^k \left(\frac{1 - p_n}{6}\right)^{j-k} = \left(p_n + \frac{1 - p_n}{6}\right)^j = \left(\frac{1 + 5p_n}{6}\right)^j = p_{n+1}^j$$

De plus :

$$1 - p_{n+1} = 1 - \frac{1 + 5p_n}{6} = \frac{5 - 5p_n}{6} = \frac{5}{6}(1 - p_n)$$

On obtient finalement la formule :

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = j) = \binom{N}{j} p_{n+1}^j (1 - p_{n+1})^{N-j}$$

D'où $\mathcal{P}(n + 1)$.

5. La suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique. L'unique solution de l'équation caractéristique $x = \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$ est $\lambda = 1$.

On introduit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = p_n - \lambda$.

La relation de récurrence vérifiée par (v_n) est : $v_{n+1} = \frac{5}{6}v_n$. Ainsi, (v_n) est une suite géométrique et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = v_1 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{6} - 1\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = -\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Commentaire

La formule précédente donne immédiatement : $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Ceci est cohérent avec l'intuition : lorsque n est grand (après un grand nombre de lancers), on s'attend à ce que tous les dés soient déjà tombés sur « six » et donc que la variable aléatoire S_n prenne la valeur N .

6. a) On propose la fonction **Python** suivante :

```

1 def simuT(N):
2     nbDés = N
3     T = 0
4     while nbDés > 0:
5         nbSix = rd.binomial(nbDés, 1/6)
6         nbDés = nbDés - nbSix
7         T = T+1
8     return T
    
```

b) • Tout d'abord :

$[T = 1]$ est réalisé \iff un seul lancer est nécessaire à l'obtention des N « six »
 \iff les N dés donnent un « six » lors du premier lancer

On peut donc conclure que : $[T = 1] = [S_1 = N]$.

• Ensuite, soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$[T = n]$ est réalisé \iff n lancers ont été nécessaires à l'obtention des N « six »
 les N dés ont donné un « six » lors de l'un des lancers entre
 \iff le premier et le n^e mais au moins l'un d'entre eux n'avait pas
 donné de « six » juste après le $(n - 1)^e$ lancer

On peut donc conclure que : $[T = n] = [S_n = N] \setminus [S_{n-1} = N]$.

c) • Tout d'abord : $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

• Ensuite :

$$\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(S_1 = N) = \binom{N}{N} \left(\frac{1}{6}\right)^N \left(\frac{5}{6}\right)^{N-N} = \frac{1}{6^N}$$

• Pour terminer, soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On remarque que $[S_{n-1} = N] \subset [S_n = N]$ donc :

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(S_n = N) - \mathbb{P}(S_{n-1} = N) = p_n^N - p_{n-1}^N = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^N$$

d) Question bonus : équivalent de $\mathbb{P}(T = n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$?

On utilise le DL usuel : $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o_{x \rightarrow 0}(x)$. D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = n) &= 1 - N\left(\frac{5}{6}\right)^n + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) - \left(1 - N\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)\right) \\ &= N\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - N\left(\frac{5}{6}\right)^n + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right) \\ &= \frac{N}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right) \quad (\text{car } o_{n \rightarrow +\infty}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)) \end{aligned}$$

On peut conclure que : $\mathbb{P}(T = n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{N}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{N}{5} \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

- Premier cas : supposons que f ne change pas de signe sur $[0, 1]$. Alors, quitte à considérer $-f$, on peut supposer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq 0$. Il suit par positivité de l'intégrale et par continuité de f que $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$. De plus, le cas d'égalité arrive si et seulement si f est identiquement nulle sur $[0, 1]$. Or, par hypothèse pour $k = 0$, on a précisément $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Donc f est identiquement nulle sur $[0, 1]$. A fortiori, f s'annule au moins n fois sur $]0, 1[$.

- Deuxième cas : supposons que f change au moins une fois de signe sur $[0, 1]$. Raisonnons par l'absurde et supposons que f s'annule au plus $n - 1$ fois sur $]0, 1[$. Remarquons que si f change de signe en un point x , alors nécessairement $x \in]0, 1[$ (f ne peut pas changer de signe en un point du bord du segment) et f s'annule au point x . Ainsi, il existe $j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ tel que f change de signe en exactement j points de $]0, 1[$, que l'on note x_1, \dots, x_j .

On pose $P(x) = \prod_{i=1}^j (x - x_i)$. La fonction P est polynomiale de degré j . Ainsi, il existe des coefficients a_0, \dots, a_j tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{i=0}^j a_i x^i$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^1 P(x)f(x)dx &= \int_0^1 \sum_{i=0}^j (a_i x^i f(x))dx && (\text{par linéarité de la somme}) \\ &= \sum_{i=0}^j a_i \int_0^1 x^i f(x)dx && (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \sum_{i=0}^j a_i \times 0 && (\text{par hypothèse sur } f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or, la fonction $x \mapsto P(x)f(x)$ est de signe constant sur $[0, 1]$ par construction de P (ces deux fonctions changent de signe exactement aux mêmes points, donc ces changements se compensent). Il suit que la fonction $x \mapsto P(x)f(x)$ est identiquement nulle sur $[0, 1]$ (c'est le raisonnement du premier point) puis que la fonction f est identiquement nulle sur $[0, 1] \setminus \{x_1, \dots, x_j\}$. L'ensemble $[0, 1] \setminus \{x_1, \dots, x_j\}$ étant infini, c'est absurde.

Sujet Maths appliquées 4

Exercice avec préparation 2

On admet que l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq y \leq 1\}$ est fermé. On considère la fonction f définie sur D par :

$$f(x, y) = (y - x)^2 + 6xy$$

1. Cours : condition nécessaire d'existence d'un extremum local.
2. Représenter graphiquement D puis montrer que la fonction f admet un minimum et un maximum globaux sur D .
3. Déterminer les points critiques de f sur l'ouvert $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 < x < y < 1\}$.
4. Déterminer des réels a et b tels que :

$$\forall (x, y) \in D, f(x, y) = a(y + x)^2 + b(y - x)^2.$$

5. Montrer que pour tout $(x, y) \in D$, on a $-2 \leq f(x, y) \leq 6$.
6. En déduire l'ensemble des points de D où f atteint son maximum (respectivement son minimum).
7. Montrer que le point origine $(0, 0)$ n'est pas un extremum local de f sur D .

Exercice sans préparation 2

Un sauteur en hauteur tente de franchir, dans cet ordre, des hauteurs successives numérotées 1, 2, etc., jusqu'à ce qu'il échoue. Il est éliminé à son premier échec.

Pour tout entier naturel non nul k la probabilité de franchir la hauteur k vaut $1/k$.

On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

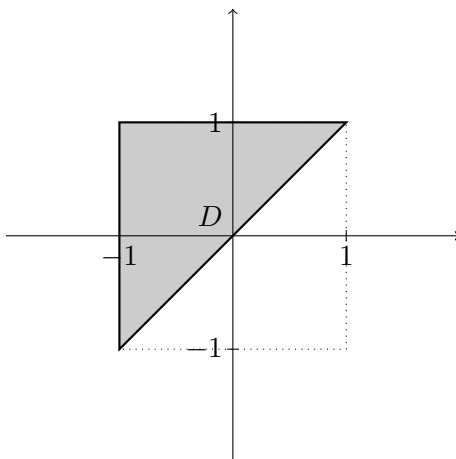
1. Écrire une fonction **Python** prenant en paramètre N et permettant d'obtenir N simulations de la variable aléatoire X , données sous forme de liste, ainsi qu'une estimation de son espérance.
2. Déterminer l'espérance, puis la variance de la variable X .

Réponses de l'exercice avec préparation 2 :

1. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U . Si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de U , alors le gradient de f s'annule au point (x_0, y_0) (autrement dit, les deux dérivées partielles de f s'annulent au point (x_0, y_0)).
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(x, y) \in D \iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ x \leq y \end{cases}$$

Les points de D sont les points du carré $[-1, 1]^2$ qui sont au dessus de la droite d'équation $y = x$. Représentation graphique (la partie D est grisée et ses bords sont en gras) :



La fonction f est polynomiale sur D . De plus, D est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^2 .

On en déduit que f admet un minimum et un maximum globaux sur D .

3. La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur D' car polynomiale. Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 sur D' . Soit $(x, y) \in D'$. On a :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy$$

et donc :

$$\begin{aligned} \partial_1(f)(x, y) &= 2x + 4y = 2(x + 2y) \\ \partial_2(f)(x, y) &= 2y + 4x = 2(2x + y) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ est un point critique de } f &\iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -3y = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or, le point $(0, 0)$ n'appartient pas à D' (la condition $x < y$ n'est pas vérifiée).

La fonction f n'admet aucun point critique sur l'ouvert D' .

4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in D$.

D'une part :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy$$

D'autre part :

$$a(y + x)^2 + b(y - x)^2 = (a + b)x^2 + (a + b)y^2 + 2(a - b)xy$$

Par identification :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 1 \\ -2b = 1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\iff \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $(x, y) \in D : f(x, y) = \frac{3}{2}(y + x)^2 - \frac{1}{2}(y - x)^2$.

5. Soit $(x, y) \in D$. D'après la question précédente :

$$-\frac{1}{2}(y - x)^2 \leq f(x, y) \leq \frac{3}{2}(y + x)^2$$

D'une part : $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$ donc, par inégalité triangulaire,

$$\frac{3}{2}(y + x)^2 = \frac{3}{2}|y + x|^2 \leq \frac{3}{2}(|x| + |y|)^2 \leq \frac{3}{2}2^2 = 6$$

Commentaire

On peut aussi raisonner en sommant les deux inégalités : $-2 \leq x + y \leq 2$ donc $0 \leq (x + y)^2 \leq 4$.

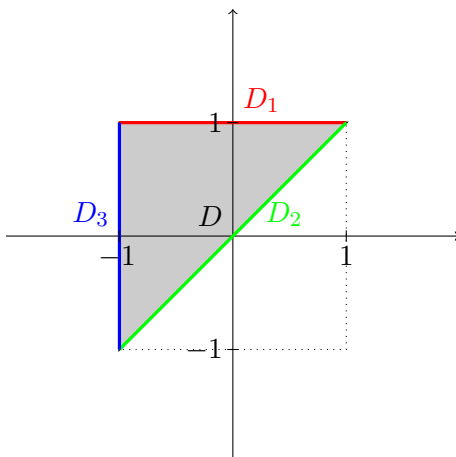
D'autre part : $0 \leq y - x \leq 1 - x \leq 2$ donc $0 \leq (y - x)^2 \leq 4$ et finalement $-\frac{1}{2}(y - x)^2 \geq -2$.

On a bien : pour tout $(x, y) \in D, -2 \leq f(x, y) \leq 6$.

6. Détaillons le raisonnement pour le maximum global (il sera analogue pour le minimum global).

On sait que f admet un maximum global sur D . Si ce maximum global est atteint dans D' , alors il est nécessairement atteint en un point critique puisque D' est un ouvert et qu'un maximum global est aussi un maximum local. Or, nous avons vu que f n'admettait aucun point critique dans D' . On peut alors conclure que le maximum global de f sur D est atteint en un point du bord de D .

Notons D_1, D_2 et D_3 les trois bords de D (qui se recoupent aux trois sommets du triangle), tels que représentés ci-dessous :

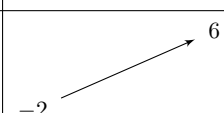


- Etude de f en restriction à D_1 .

Pour tout $(x, y) \in D_1$, on a $y = 1$ donc :

$$f(x, y) = f(x, 1) = x^2 + 4x + 1$$

L'étude (simple) de la fonction $h_1 : x \mapsto x^2 + 4x + 1$ définie sur $[-1, 1]$ donne son tableau de variations :

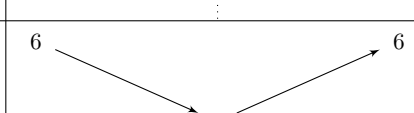
x	-1	1
Signe de $h'_1(x)$	+	
Variations de h_1		

- Etude de f en restriction à D_2 .

Pour tout $(x, y) \in D_2$, on a $y = x$ donc :

$$f(x, y) = f(x, x) = 6x^2$$

L'étude (simple) de la fonction $h_2 : x \mapsto 6x^2$ définie sur $[-1, 1]$ donne son tableau de variations :

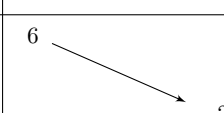
x	-1	0	1
Signe de $h'_2(x)$	-	0	+
Variations de h_2			

- Etude de f en restriction à D_2 .

Pour tout $(x, y) \in D_2$, on a $x = -1$ donc :

$$f(x, y) = f(-1, y) = 1 + y^2 - 4y$$

L'étude (simple) de la fonction $h_3 : y \mapsto y^2 - 4y + 1$ définie sur $[-1, 1]$ donne son tableau de variations :

x	-1	1
Signe de $h'_3(x)$	-	
Variations de h_3		

Bilan : f atteint son maximum global en $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ et la valeur de ce maximum global est 6.
De plus, f atteint son minimum global en $(-1, 1)$ et la valeur de ce minimum global est -2 .

Commentaire

La méthode mise en place dans cette question est générale et doit être connue. On pouvait cependant aller plus vite en exploitant encore la formule obtenue à la question 4. En testant les trois sommets du triangle, on remarque que la valeur du maximum global est 6 et la valeur du minimum global est -2 . Il reste alors à trouver tous les points où ces extrema globaux sont atteints.

$$f(x, y) = -2 \iff \begin{cases} -\frac{1}{2}(y-x)^2 = -2 \\ (x+y)^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (y-x)^2 = 4 \\ y = -x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = -x \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

car le point $(1, -1)$ n'appartient pas à D .

$$f(x, y) = 6 \iff \begin{cases} \frac{3}{2}(x+y)^2 = 6 \\ (y-x)^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ OU } \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

7. Remarquons tout d'abord que $f(0, 0) = 0$.

- Pour tout $x \neq 0$ proche de 0, on a $(x, x) \in D$ et :

$$f(x, x) = 6x^2 > 0 = f(0, 0)$$

donc le point $(0, 0)$ n'est pas un maximum local.

- Pour tout $x < 0$ proche de 0, on a $(x, -x) \in D$ et :

$$f(x, -x) = -2x^2 < 0 = f(0, 0)$$

donc le point $(0, 0)$ n'est pas un minimum local.

Le point origine $(0, 0)$ n'est pas un extremum local de f sur D .

Réponses de l'exercice sans préparation 2 :

1. Découpons cette question en deux fonctions **Python** puis un script **Python**.

Tout d'abord, écrivons une fonction **Python** simulant la variable aléatoire X .

```

1 def simuX():
2     k = 1
3     while rd.random() < 1/k : # tant que le sauteur réussit le ke saut
4         k = k+1
5     return k-1

```

On écrit ensuite une fonction renvoyant une liste de N simulations de X .

```

1 def liste_simuX(N):
2     return [simuX() for i in range(N)]

```

On termine par un script renvoyant une valeur approchée de l'espérance de X , à l'aide de la loi faible des grands nombres (il faut prendre pour cela une grande valeur de N).

```

1 N = 10**5
2 print(sum(liste_simuX(N)) / N)

```

2. Tout d'abord : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Ensuite, d'après la formule des probabilités composées, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X = k) = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{k} \times \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{k}{(k+1)!}$$

On a alors, par croissances comparées :

$$k^4 \mathbb{P}(X = k) = \frac{k^5}{(k+1)!} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

et donc :

$$k^2 \mathbb{P}(X = k) = o_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k^2} \right)$$

et donc la série $\sum k^2 \mathbb{P}(X = k)$ converge par critère de comparaison pour les séries à termes positifs. Par conséquent, X admet une espérance et une variance. Ceci nous permet de faire des calculs avec des sommes infinies dans la suite.

On a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{(k+1)!}$$

Cette somme n'est pas si facile à calculer, puisque k^2 et $(k+1)!$ ne se simplifient pas immédiatement. On peut alors plutôt calculer $\mathbb{E}(X+1)$ par théorème de transfert, ce qui amène une simplification évidente :

$$\mathbb{E}(X+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k+1)}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

On peut alors conclure par linéarité : $\mathbb{E}(X) = e - 1$.

Ensuite :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{(k+1)!}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, on calcule une autre espérance par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}((X-1)(X+1)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1)k(k+1)}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1)k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

Par linéarité, puisque $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$, on a :

$$\mathbb{E}(X^2) = e + 1$$

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = e + 1 - (e - 1)^2 = e + 1 - e^2 + 2e - 1 = 3e - e^2 = e(3 - e)$$

On a : $\mathbb{V}(X) = e(3 - e)$.