

1 Rappels de cours

Définition de la puissance entière

Soient a un réel et n un entier naturel.

La puissance entière a^n est définie par :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

ou, de manière plus formelle :

$$a^n = \prod_{i=1}^n a$$

Par convention :

$$a^0 = 1 \quad (\text{en particulier : } 0^0 = 1)$$

Si a est non nul et m est un entier strictement négatif, on définit la puissance entière négative par :

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}}$$

(il faut alors remarquer que $-m$ est positif, ce qui permet d'utiliser la première définition).

Définition de la puissance réelle

Soient x un réel strictement positif et α un réel.

La puissance réelle x^α est définie par :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

et cette définition généralise celle de la puissance entière.

Dans ce contexte, x est appelé la *base* et α la *puissance*.

Propriétés

Pour tous réels a, b et tous réels α, β (dès lors que les expressions ont un sens) :

1. *Compatibilité avec le produit pour une même base* : $a^\alpha \times a^\beta = a^{\alpha+\beta}$.
2. *Compatibilité avec le quotient pour une même base* : $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$.
3. *Puissance d'une puissance* : $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.
4. *Compatibilité avec le produit pour une même puissance* : $a^\alpha \times b^\alpha = (ab)^\alpha$.
5. *Compatibilité avec le quotient pour une même puissance* : $\frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha$.

Exemples :

$$2^3 \times 2^5 = 2^8, \quad \frac{5^7}{5^3} = 5^4, \quad (3^2)^4 = 3^8, \quad 2^3 \times 5^3 = 10^3, \quad \frac{2^4}{3^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

Cas particuliers à connaître par cœur :

1. Pour tout réel α : $1^\alpha = 1$.
2. Pour tout entier naturel n :

$$0^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

3. Pour tout entier relatif n :

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

4. Pour tout réel $x \geq 0$: $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

2 Exercices

Exercice 1 : Ecrire sous la forme d'une seule puissance d'un nombre premier les nombres suivants.

1. $3^4 \times 3^2$

3. $(2^5)^3$

5. $\frac{2^7 \times 2^3 \times 2^{-1}}{4^2}$

2. $\frac{7^8}{7^3}$

4. $\frac{5^{-2} \times 5^7}{5^3}$

6. $(3^5)^2 \times 9^2 \times 3^{-4}$

Exercice 2 : Ecrire sous la forme $2^n \times 3^m$ les nombres suivants.

1. $(3^2 \times 16^3)^4$

2. $\frac{3^{-2} \times 27}{(3^3)^3 \times 3^{-1}}$

3. $\frac{6^3 \times 2^{-5}}{4^2 \times 12^{-4}}$

Exercice 3 : Ecrire la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants.

1. 72

3. $3^4 \times 4^2 \times 2^5 \times 3^3$

5. $5^3 \times 7^2 \times 5^{-2} \times 7 \times 7^{-1}$

2. $(2^3 \times 3^2) \times (2^4 \times 3)$

4. $(2^5 \times 5^2) \times (2 \times 3 \times 5)$

6. $8^2 \times 5^{11} \times 3 \times 2^{-2} \times 10^{-1}$

Exercice 4 : Réécrire les termes u_k suivants de sorte à pouvoir calculer $\sum_{k=0}^n u_k$ comme une somme géométrique.

1. $u_k = \frac{1}{2^k}$

2. $u_k = e^{-k}$

3. $u_k = \frac{1}{3^{2k+1}}$

Exercice 5 : Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les expressions suivantes.

1. $2^{n+1} - 2^n$

3. $\frac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$

5. $\frac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$

2. $5^{n+2} - 5^{n+1} - 3 \times 5^n + 7 \times 5^{n-1}$

4. $\frac{16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}}{8^n}$

6. $\frac{3^{(3^n)}}{(3^3)^n}$

3 Corrections détaillées

Correction détaillée de l'exercice 1 :

1. $3^4 \times 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$
2. $\frac{7^8}{7^3} = 7^{8-3} = 7^5$
3. $(2^5)^3 = 2^{5 \times 3} = 2^{15}$
4. $\frac{5^{-2} \times 5^7}{5^3} = 5^{-2+7-3} = 5^2$
5. $\frac{2^7 \times 2^3 \times 2^{-1}}{4^2} = \frac{2^9}{(2^2)^2} = \frac{2^9}{2^4} = 2^5$
6. $(3^5)^2 \times 9^2 \times 3^{-4} = 3^{10} \times (3^2)^2 \times 3^{-4} = 3^{10} \times 3^4 \times 3^{-4} = 3^{10}$

Correction détaillée de l'exercice 2 :

1. $(3^2 \times 16^3)^4 = (3^2 \times (2^4)^3)^4 = (3^2 \times 2^{12})^4 = 2^{48} \times 3^8$
2. $\frac{3^{-2} \times 27}{(3^3)^3 \times 3^{-1}} = \frac{3^{-2} \times 3^3}{3^9 \times 3^{-1}} = \frac{3}{3^8} = 2^0 \times 3^{-7}$
3. $\frac{6^3 \times 2^{-5}}{4^2 \times 12^{-4}} = \frac{(2 \times 3)^3 \times 2^{-5}}{(2^2)^2 \times (3 \times 2^2)^{-4}} = \frac{2^3 \times 3^3 \times 2^{-5}}{2^4 \times 3^{-4} \times 2^{-8}} = \frac{2^{-2} \times 3^3}{2^{-4} \times 3^{-4}} = 2^{4-2} \times 3^{4+3} = 2^2 \times 3^7$

Correction détaillée de l'exercice 3 :

1. $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18 = 2^2 \times 3 \times 6 = 2^2 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3^2$
2. $(2^3 \times 3^2) \times (2^4 \times 3) = 2^3 \times 2^4 \times 3^2 \times 3 = 2^7 \times 3^3$
3. $3^4 \times 4^2 \times 2^5 \times 3^3 = 3^4 \times (2^2)^2 \times 2^5 \times 3^3 = 2^4 \times 2^5 \times 3^4 \times 3^3 = 2^9 \times 3^7$
4. $(2^5 \times 5^2) \times (2 \times 3 \times 5) = 2^5 \times 2 \times 3 \times 5^2 \times 5 = 2^6 \times 3 \times 5^3$
5. $5^3 \times 7^2 \times 5^{-2} \times 7 \times 7^{-1} = 5^3 \times 5^{-2} \times 7^2 \times 7 \times 7^{-1} = 5 \times 7^2$
6. $8^2 \times 5^{11} \times 3 \times 2^{-2} \times 10^{-1} = (2^3)^2 \times 5^{11} \times 3 \times 2^{-2} \times (2 \times 5)^{-1} = 2^6 \times 2^{-2} \times 2^{-1} \times 3 \times 5^{11} \times 5^{-1} = 2^3 \times 3 \times 5^{10}$

Correction détaillée de l'exercice 4 :

1. $u_k = \frac{1}{2^k} = \frac{1^k}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$
2. $u_k = e^{-k} = (e^{-1})^k$
3. $u_k = \frac{1}{3^{2k+1}} = \frac{1}{3 \times 3^{2k}} = \frac{1}{3 \times (3^2)^k} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{9^k} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{9}\right)^k$

Correction détaillée de l'exercice 5 :

$$1. 2^{n+1} - 2^n = 2 \times 2^n - 2^n = (2 - 1) \times 2^n = 2^n$$

$$2. 5^{n+2} - 5^{n+1} - 3 \times 5^n + 7 \times 5^{n-1} = 5^{n-1} \times (5^3 - 5^2 - 3 \times 5 + 7) = 5^{n-1} \times (125 - 25 - 15 + 7) = 92 \times 5^{n-1}$$

$$3. \frac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4} = \frac{\cancel{5}^n \times (2 \times 6)^2}{(2 \times \cancel{6})^n \times 6^4} = \frac{2^2 \times 6^2}{2^n \times 6^4} = \frac{1}{2^{n-2} \times 6^2} = \frac{1}{2^{n-2} \times (2 \times 3)^2} = \frac{1}{2^n \times 3^2}$$

$$4. \frac{16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}}{8^n} = \frac{2^{4n+4} - 2^{4n+2} + 2^{4n}}{2^{3n}} = 2^{n+4} - 2^{n+2} + 2^n = 2^n \times (2^4 - 2^2 + 1) = 13 \times 2^n$$

$$5. \frac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n} = \frac{2^5 \times 2^{3n-3}}{2^{2n+2} - 2^{2n}} = \frac{2^{3n+2}}{2^{2n} \times (2^2 - 1)} = \frac{2^{n+2}}{3}$$

$$6. \frac{3^{(3^n)}}{(3^3)^n} = \frac{3^{(3^n)}}{3^{3n}} = 3^{3^n - 3n} = 3^{3(3^{n-1} - n)}$$