

Exos de cours**Exercice 1 :** Calculer les vecteurs suivants.

1. $(1, 3) + (-2, 5)$

4. $x \cdot (-1, 1) + y \cdot (3, 4)$

7. $(-3) \cdot (-4, 5, 1) + 2 \cdot (1, 2, 0)$

2. $3 \cdot (-2, 5)$

5. $(-1, 0, 1) + (0, 3, -3)$

8. $x \cdot (-2, 0, 2) + y \cdot (3, 1, 0)$

3. $2 \cdot (1, 2) - (-2, 7)$

6. $4 \cdot (-2, 3, 1)$

Exercice 2 : Calculer les vecteurs suivants.

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

4. $x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

7. $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. $4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

8. $x \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

3. $(-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

6. $(-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : Calculer les vecteurs suivants.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

4. $x \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 2 & 8 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & -8 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

2. $4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

8. $x \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $(-2) \cdot \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

6. $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 4 : Calculer les vecteurs suivants.

1. $(X + 2) + (X + 3)$

7. $2 \cdot (-X^2 - 2X + 2) - (X^2 - 4X + 5)$

2. $3 \cdot (-X + 4)$

8. $a \cdot (3X^2 - X + 2) + b \cdot (X - 4)$

3. $2 \cdot (X + 1) - (2X + 10)$

9. $(-X^3 + X^2 - X + 1) + (X^3 + X^2 + X + 1)$

4. $a \cdot (-2X + 3) + b \cdot (X - 5)$

10. $(-1) \cdot (-2X^3 + 3X^2 - X + 1)$

5. $(X^2 + 2X + 1) + (3X^2 - X - 1)$

11. $(-3) \cdot (X^3 + 1) + 2 \cdot (X^2 + 3X + 4)$

6. $3 \cdot (2X^2 - 3X + 4)$

12. $a \cdot (4X^3 + 2X + 3) + b \cdot (-2X^3 - X^2 + 3)$

Exercice 5 : Démontrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

1. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = M\}$ (espace des matrices carrées symétriques d'ordre n)
2. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = -M\}$ (espace des matrices carrées antisymétriques d'ordre n) (EDHEC 2020)
3. $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (commutant de A)
4. $F = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}$, où $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
5. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$
6. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$
7. $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - 2f(x) = 0\}$
8. $F = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0\right\}$
9. $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\right\}$

Exercice 6 : Pour chaque ensemble ci-dessous, déterminer s'il s'agit ou non d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3 = 0\}$.
3. $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.
4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \text{ et } y = 5z\}$.
5. $F_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$.
6. $F_6 = \{(2x + y, y - 2, 1 + x - y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
7. $F_7 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x = y + z - t\}$.
8. $F_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 0\}$.

Exercice 7 : Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 = M\}$. L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 8 : Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est libre.

Exercice 9 : Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est liée.

Exercice 10 : Montrer que la famille $(1, -3 + X, 1 - X^2)$ est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 11 : Les familles $\mathcal{F}_k$ suivantes sont-elles libres?

1. $\mathcal{F}_1 = ((1, 2), (1, -1))$
2. $\mathcal{F}_2 = ((1, 4))$
3. $\mathcal{F}_3 = ((0, 0))$
4. $\mathcal{F}_4 = ((1, -2), (2, 3), (1, 0))$
5. $\mathcal{F}_5 = ((2, 3), (-4, -6))$
6. $\mathcal{F}_6 = ((3, -1), (-1, 4))$

Exercice 12 : Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas une famille génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 13 : Montrer que $(1, 2X + 1, X^2 - 3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 14 : Trouver une base de l'ensemble $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\right\}$.

Exercice 15 : Montrer que $((1, 1), (2, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Quels sont les coordonnées du vecteur $(3, 4)$ dans cette base ?

Exercice 16 : Déterminer les coordonnées du polynôme $Q(X) = (X - 2)^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 17 : On considère les ensembles

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(-X) = -P(X)\} \quad G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(-X) = P(X)\}$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner une base de chacun d'eux.
3. Donner leur dimension.

Exercice 18 : Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$1. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

Exercice 19 : Déterminer le rang des familles suivantes.

$$1. \mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$3. \mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$6. \mathcal{G}_3 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$2. \mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$4. \mathcal{G}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$5. \mathcal{G}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$7. \mathcal{H}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Sous-espaces vectoriels

Exercice 20 : Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$1. F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 1\}.$$

$$2. F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(2)\}.$$

Exercice 21 : Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$1. A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = 2c \right\}$$

$$3. C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b = 1 \right\}$$

$$2. B = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x - y \\ y & x + 2y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$4. D = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ 2x - y & x - 2y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 22 :[Limite programme / oral HEC] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$$1. F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 0\}.$$

uniques racines 0 et 1.

$$2. F = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}.$$

5. L'ensemble des polynômes réels dont le degré est compris entre 3 et 5.

$$3. E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)\}.$$

$$6. F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2\}.$$

4. L'ensemble des polynômes réels ayant comme

$$7. F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = 1\}.$$

8. L'ensemble des suites réelles à termes positifs.
9. L'ensemble des suites réelles bornées.
10. L'ensemble $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de taille n .

Familles génératrices, familles libres, bases, coordonnées

Exercice 23 : On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que $((1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 3), (1, 0, 3, 3))$ en est une base.
2. Quelles sont les coordonnées de $(1, 0, 0, -1)$ dans cette base ?

Exercice 24 : On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (-1, 1, -1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de e_1 , e_2 et e_3 dans la base $\mathcal{B}$.
En déduire les coordonnées de (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 25 : Donner une base du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions (x, y, z, t) du système suivant.

$$\begin{cases} x + 2y - t & = 0 \\ x - 3y & + 9z = 0 \\ 3x - 4y - t + 18z & = 0 \end{cases}$$

Exercice 26 : On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. (a) Montrer que $(1, 1 + X, (1 + X)^2, (1 + X)^3)$ est une base de E .
(b) Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?
2. (a) Montrer que $((X - 1)(X - 2)(X - 3), X(X - 2)(X - 3), X(X - 1)(X - 3), X(X - 1)(X - 2))$ est aussi une base de E .
(b) Quelles sont les coordonnées de X^3 dans cette base ?

Exercice 27 : On considère les polynômes :

$$P(X) = X, \quad Q(X) = X - 1 \quad \text{et} \quad R(X) = (X - 1)(X - 2)$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P, Q, R)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soient a, b, c trois réels. Déterminer, à l'aide de la base $\mathcal{B}$, un polynôme $T \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que :

$$T(1) = a, \quad T(2) = b, \quad T(3) = c$$

Exercice 28 : On considère les polynômes :

$$P_1(X) = 1 + X + X^2, \quad P_2(X) = X + X^2 \quad \text{et} \quad P_3(X) = X^2$$

1. Montrer que (P_1, P_2, P_3) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de $P(X)$ dans la base (P_1, P_2, P_3) .

Exercice 29 :

1. Montrer que $(1, (X - 1), (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer les coordonnées de X^3 dans cette base.
3. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer les coordonnées de $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$ dans cette base.

Exercice 30 : Pour chaque famille A_k suivante, déterminer si elle est libre, le rang de la famille puis si c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. $A_1 = (P_1, P_2, P_3)$ où les polynômes P_1 , P_2 et P_3 sont définis par :

- $P_1(X) = -1 + 3X + X^2$

- $P_2(X) = 4 - 2X + 3X^2$

- $P_3(X) = 4 - 3X - 2X^2$

2. $A_2 = (P_1, P_2, P_3)$ où les polynômes P_1 , P_2 et P_3 sont définis par :

- $P_1(X) = -5 + 2X$

- $P_2(X) = 6 - X^2$

- $P_3(X) = 27 - 6X - 2X^2$

Exercice 31 : On se place dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On considère les matrices colonne

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

En déduire les coordonnées de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 32 : On considère les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. La famille (M_1, M_2, M_3) est-elle libre ?
2. La famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est-elle libre ?

Espace vectoriel de dimension finie

Exercice 33 : Déterminer une base et la dimension des sev de $\mathbb{R}^3$ suivants :

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$.
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 5z = 0\}$.

Exercice 34 : On définit les trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Déterminer la dimension de $\text{Vect}(A, B, C)$.

Exercice 35 : On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels. Si oui, en donner une base et la dimension.

1. L'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0$.
2. L'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MB$.
3. L'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = B$.
4. L'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AM = M$.

Exercice 36 : On considère E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel.
2. Montrer que $((2^n)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}})$ forme une famille libre de E . En déduire la dimension de E .

Exercice 37 : On considère $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a & b \\ a-b & b & a \\ 2a & 2b & 2a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel réel.
2. Déterminer la dimension de $\mathcal{E}$.

Exercice 38 : On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On considère les vecteurs de E :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_4 = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où m désigne un paramètre réel.

1. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (X_1, X_2, X_3, X_4) est une famille génératrice de E .
2. Lorsque $\text{Vect}(X_1, X_2, X_3, X_4) \neq E$, déterminer sa dimension.
3. Lorsque $m = -3$, déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\text{Vect}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ extraite de la famille (X_1, X_2, X_3, X_4) . Compléter la base $\mathcal{B}$ en une base de E .
4. Lorsque $m = 1$, déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\text{Vect}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ extraite de la famille (X_1, X_2, X_3, X_4) . Compléter la base $\mathcal{B}$ en une base de E .

Rang d'une famille de vecteurs

Exercice 39 : Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u = (1, 3, -1), \quad v = (2, 0, 1), \quad w = (a, 2 - a, 2a - 1)$$

Déterminer le rang de la famille (u, v, w) en fonction de a . Pour quelles valeurs de a la famille est-elle libre ?

Rang d'une matrice

Exercice 40 : Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$1. A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$2. A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3. A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4. B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & 8 \\ 3 & -7 & 29 \end{pmatrix}$$

$$5. B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6. B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$7. B_4 = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$8. B_5 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$9. C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$10. C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$11. C_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$12. D_3 = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -6 & 4 \\ 0 & 9 & 3 & -3 \\ -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 41 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang des matrices suivantes en fonction de a :

$$1. M_1 = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2a+1 & 3 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$2. M_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

$$3. M_3 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a \\ a+1 & a^2 \end{pmatrix}$$