

1 Introduction aux probabilités discrètes

Considérons le jeu suivant : Alice lance 10 fois un dé à 6 faces. Elle gagne si elle obtient au moins 2 fois le nombre 6, elle perd sinon. Alice a-t-elle plus de chances de gagner ou de perdre ?

Derrière ce jeu se cache une expérience aléatoire. Pour pouvoir répondre à la question il faut faire un calcul de probabilités, mais avant cela il faut *modéliser* cette expérience aléatoire.

On modélise l'expérience aléatoire par un univers Ω : il s'agit d'un ensemble qui contient tous les résultats possibles de l'expérience. Ici,

$$\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^{10} = \{(\omega_1, \dots, \omega_{10}) \mid \forall k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket, \omega_k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket\}$$

A la fin du jeu, Alice a bien obtenu 10 nombres entiers compris entre 1 et 6. De plus ces 10 nombres ont été obtenus dans un certain ordre. L'univers contient toutes les suites ordonnées (et finies) de 10 nombres que peut obtenir Alice. Si Alice obtient la suite de nombres $(x_1, \dots, x_{10})$, on dit que $(x_1, \dots, x_{10})$ est *l'issue* de l'expérience. Chaque fois que l'on répète l'expérience on obtient une nouvelle issue et on ne peut pas prévoir quelle issue on va obtenir avant d'avoir réalisé l'expérience. Notons par ailleurs que cette expérience possède $6^{10} = 60466176$ issues différentes. C'est beaucoup!¹

Certaines issues font gagner Alice (par exemple l'issue $\omega = (6, 1, 4, 5, 5, 2, 6, 3, 3, 1)$) tandis que d'autres la font perdre (par exemple l'issue $\omega = (6, 1, 4, 5, 5, 2, 4, 3, 3, 1)$). Ainsi, la phrase « Alice perd au jeu » est une proposition dont la valeur de vérité *dépend* de l'issue de l'expérience. On appelle une telle proposition un *événement*. Formellement, un événement est modélisé par un ensemble. Plus précisément, un événement défini par une proposition P est modélisé par la partie de l'univers Ω contenant toutes les issues rendant vrai la proposition P . Par exemple, l'événement « Alice perd au jeu » n'est rien d'autre que l'ensemble contenant toutes les issues qui font perdre Alice, c'est-à-dire l'ensemble

$$\begin{aligned} F &= \{(\omega_1, \dots, \omega_{10}) \in \Omega \mid \text{Card}(\{k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket \mid \omega_k = 6\}) \leq 1\} \\ &= \{(\omega_1, \dots, \omega_{10}) \in \Omega \mid \forall k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket, \omega_k \neq 6 \text{ ou } \exists ! k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket, \omega_k = 6\} \end{aligned}$$

On dit que l'événement F est *réalisé* si l'issue de l'expérience appartient à l'ensemble F . Avec ce vocabulaire, on peut dire qu'un événement est un ensemble contenant toutes les issues qui le réalisent.

En passant des propositions (qui sont des phrases) aux ensembles (qui sont des objets plus abstraits) on perd en simplicité mais on gagne en puissance de calcul. En effet, les opérations génériques sur les ensembles peuvent être utilisées sur les événements :

- l'union (qui remplace le **OU** dans les phrases)
- l'intersection (qui remplace le **ET** dans les phrases)
- le passage au complémentaire (qui remplace la **négation** d'une phrase)

Ces opérations permettent de décrire des événements complexes à partir d'événements plus simples associés à chaque lancer, qu'on appellera des événements *élémentaires*. Pour cette expérience, nous introduisons les événements élémentaires :

$$\forall k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket, P_k : \text{« On obtient 6 au lancer numéro } k \text{ »}$$

On peut décrire entièrement l'événement F à l'aide des événements P_k et des opérations ensemblistes précédentes :

$$\begin{aligned} F &= \left(\overline{P_1} \cap \dots \cap \overline{P_{10}} \right) \\ &\cup \left(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \dots \cap \overline{P_{10}} \right) \\ &\cup \left(\overline{P_1} \cap P_2 \cap \overline{P_3} \cap \dots \cap \overline{P_{10}} \right) \\ &\cup \left(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap P_3 \cap \overline{P_4} \cap \dots \cap \overline{P_{10}} \right) \\ &\vdots \\ &\cup \left(\overline{P_1} \cap \dots \cap \overline{P_9} \cap P_{10} \right) \end{aligned}$$

Cette description de F est plus simple que la précédente, au sens où l'on voit clairement ce qui arrive à chaque lancer du dé dans chacun des cas. Cependant, on peut remarquer que l'écriture devient fastidieuse dès qu'il y a beaucoup de lancers.

1. Si l'on considère qu'il faut environ 6 secondes pour effectuer un lancer de dé, l'expérience dure environ 1 minute. Avec cette hypothèse, il faudrait au moins 115 années de jeu ininterrompu à Alice pour avoir une chance d'obtenir toutes les issues. Ce nombre est une borne minimale, mais est bien loin du temps d'attente moyen. En effet, 115 années est le temps qu'il faut pour obtenir toutes les issues si on n'obtient jamais deux fois la même issue, mais une telle hypothèse n'est pas raisonnable !

Ainsi, plutôt que de prendre le point de vue des événements élémentaires associés à chaque lancer, on peut considérer le nombre de 6 obtenus par Alice, noté X , qui lui dépend de l'entiereté de l'expérience. Puisque ce nombre dépend de l'issue de l'expérience, on l'appelle *variable aléatoire*. Formellement, une variable aléatoire est une application $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire un processus qui à chaque issue associe un nombre réel. Par exemple,

$$X(6, 1, 4, 5, 5, 2, 4, 3, 3, 1) = 1$$

$$X(6, 1, 4, 5, 5, 2, 6, 3, 3, 1) = 2$$

$$X(1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6) = 5$$

On dit que X prend la valeur k si l'issue ω obtenue est telle que $X(\omega) = k$. On notera $[X = k]$ l'événement « X prend la valeur k ». Ainsi, dire que X prend la valeur k revient à dire que l'événement $[X = k]$ est réalisé.

Revenons maintenant à notre événement F : « Alice perd au jeu ». Dire que Alice perd, c'est dire que X prend la valeur 0 ou la valeur 1. On peut donc écrire

$$F = [X = 0] \cup [X = 1]$$

ce qui est nettement plus économe que la description en terme d'événements élémentaires. Cependant, on peut se demander si l'on comprend aussi bien les événements $[X = k]$ que les événements P_k . La réponse est oui lorsque la loi de X est connue, et c'est en particulier le cas lorsque X suit une loi usuelle.

En considérant que toutes les issues sont équiprobables (chaque face du dé à autant de chances d'apparaître que les autres), il vient que X suit la loi binomiale de paramètres 10 (le nombre de lancers) et $\frac{1}{6}$ (la probabilité qu'un dé tombe sur 6). Puisque les événements $[X = 0]$ et $[X = 1]$ sont incompatibles, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}([X = 0] \cup [X = 1]) \\ &= \mathbb{P}([X = 0]) + \mathbb{P}([X = 1]) \\ &= \binom{10}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{10}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^9 \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 10 \times \frac{5^9}{6^{10}} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \\ &= 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \\ &\approx 0,48 \end{aligned}$$

Ainsi, Alice à environ 48% de chances de perdre et 52% de chances de gagner le jeu.

Pour réussir les exercices de concours, il faut être à l'aise avec la décomposition d'événements complexes en événements élémentaires ou en événements définis à l'aide de variables aléatoires. Lorsque aucune loi usuelle n'est en jeu, ce sont les événements élémentaires qui permettent d'aller au bout du calcul, malgré l'imbrication parfois lourde d'intersections et d'unions. Dans cet exemple, nous aurions pu calculer $\mathbb{P}(F)$ directement via les événements élémentaires en utilisant l'incompatibilité (pour les unions) et l'indépendance des lancers (pour les intersections) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F) &= \left(\mathbb{P}(\overline{P_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(\overline{P_{10}}) \right) \\ &+ \left(\mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(\overline{P_2}) \times \cdots \times \mathbb{P}(\overline{P_{10}}) \right) \\ &+ \left(\mathbb{P}(\overline{P_1}) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(\overline{P_3}) \times \cdots \times \mathbb{P}(\overline{P_{10}}) \right) \\ &\vdots \\ &+ \left(\mathbb{P}(\overline{P_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(\overline{P_9}) \times \mathbb{P}(P_{10}) \right) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 10 \times \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^9 \end{aligned}$$

On retiendra que pour pouvoir effectuer le calcul de probabilité, on essaye d'écrire F comme une union d'événements incompatibles, chacun étant une intersection d'événements indépendants. Si les événements ne sont pas indépendants, on a recours à la formule des probabilités composées.

2 Espaces probabilisables

2.1 Notion d'espace probabilisable

Definition 1. On appelle *espace probabilisable* la donnée d'un couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où :

- Ω est un ensemble appelé *univers*. C'est l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- $\mathcal{A}$ est l'ensemble des événements.

Definition 2.

- L'événement $\emptyset$ (l'ensemble vide) est l'*événement impossible*.
- L'événement Ω est l'*événement certain*.
- Si A est un événement, on note $\bar{A}$ l'*événement contraire* de A : $\bar{A} = \Omega \setminus A$.
- Soit A un événement et soit $\omega \in \Omega$ l'issue de l'expérience. On dit que l'événement A est *réalisé* si $\omega \in A$.

Les probabilistes n'essayent pas en général de décrire précisément Ω et $\mathcal{A}$. Donnons tout de même quelques exemples dans des cas simples (univers fini de petite taille).

Exemple 1 (Expérience : on effectue 1 lancer d'une pièce).

Univers : $\Omega = \{P, F\}$.

Soit A l'événement « la pièce tombe sur Pile ». Alors $\bar{A}$ est l'événement « la pièce tombe sur Face ».

Exemple 2 (Expérience : on effectue 1 lancer d'un dé à 6 faces).

Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soit A l'événement « le résultat est pair ». Alors $\bar{A}$ est l'événement « le résultat est impair ». L'issue $\omega = 4$ réalise A .

Exemple 3 (Expérience : on effectue 4 lancers d'un dé à 6 faces).

Univers : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^4$.

Soit A l'événement « le plus grand des résultats est supérieur ou égal à 5 ». Alors $\bar{A}$ est l'événement « tous les lancers ont donné un nombre inférieur ou égal à 4 ». L'issue $\omega = (1, 4, 3, 6)$ réalise l'événement A .

2.2 Lois de Morgan

Proposition 1.

- Soient A et B deux événements. Alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ sont des éléments de $\mathcal{A}$. De plus :

$$\begin{aligned}\overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B} \\ \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B} \\ A \setminus B &= A \cap \bar{B}\end{aligned}$$

- Plus généralement, soit $I \subset \mathbb{N}$ et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements. Alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{i \in I} A_i$ sont des événements. De plus :

$$\begin{aligned}\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} &= \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i \\ \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} &= \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i\end{aligned}$$

Exemple 4. Reprenons l'exemple du lancer d'un dé à 6 faces.

Introduisons deux événements A : « le résultat est pair » et B : « le résultat est supérieur ou égal à 5 ».

L'événement $A \cap B$ est : « le dé tombe sur 6 » (c'est le seul résultat pair qui soit supérieur ou égal à 5) et donc $\overline{A \cap B}$ est : « le résultat est inférieur ou égal à 5 ».

D'autre part, $\bar{A}$ est : « le résultat est impair » et $\bar{B}$ est : « le résultat est inférieur ou égal à 4 ». Ainsi, $\bar{A} \cup \bar{B}$ est : « le résultat est inférieur ou égal à 5 ».

On retrouve bien la formule $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

2.3 Système complet d'événements

Definition 3. Soient A et B deux événements. Les événements A et B sont dits *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 5. Reprenons l'exemple du lancer d'un dé à 6 faces et de l'événement A : « le résultat est pair ». Rappelons que $\bar{A}$ est l'événement : « le résultat est impair ». Le dé tombe sur une seule face et un nombre ne peut pas être simultanément pair et impair, donc $A \cap \bar{A} = \emptyset$. Les événements A et $\bar{A}$ sont incompatibles. C'est en fait un résultat général.

Proposition 2. Soit A un événement. Les événements A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

Definition 4. Soit $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements. La famille $(A_i)_{i \in I}$ est un *système complet d'événements* si :

- Pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. (les événements sont deux à deux incompatibles)
- $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$. (au moins l'un des A_i est réalisé)

Exemple 6. Soit A un événement. La famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements.

1. Pour l'expérience d'un lancé d'une pièce ($\Omega = \{P, F\}$), les événements A : « le résultat est Pile » et $\bar{A}$: « le résultat est Face » forment un système complet d'événements naturel.
2. Pour l'expérience d'un lancé de dé à 6 faces ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$), les événements A : « le résultat est pair » et $\bar{A}$: « le résultat est impair » forment un système complet d'événements.
Les événements B_i : « le dé tombe sur i » ($i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$) forment un autre système complet d'événements.

Remarque 1. De manière informelle, on retiendra que toute disjonction de cas donne un système complet d'événements.

2.4 Événements élémentaires

Lorsqu'une expérience aléatoire consiste en une répétition d'une expérience élémentaire (on répète le lancer d'une pièce de monnaie, ou le tirage d'une boule dans une urne), il est utile de définir des événements élémentaires qui ne dépendent que d'une seule étape de l'expérience. Donnons les exemples les plus classiques ci-dessous.

Exemple 7.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si l'expérience consiste en n lancers (resp. une succession infinie de lancers) d'une pièce de monnaie, on introduira, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (resp. pour tout $k \in \mathbb{N}^*$), les événements :

P_k : « la pièce tombe sur **P**ile lors du k^{e} lancer »

F_k : « la pièce tombe sur **F**ace lors du k^{e} lancer »

2. Si l'expérience consiste en n tirages (resp. une succession infinie de tirages) d'une boule dans une urne contenant des boules blanches et des boules noires, on introduira, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (resp. pour tout $k \in \mathbb{N}^*$), les événements :

B_k : « on obtient une boule blanche lors du k^{e} tirage »

N_k : « on obtient une boule noire lors du k^{e} tirage »

3 Espaces probabilisés

3.1 Probabilité

Definition 5. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

1. Une *probabilité* est une application $\mathbb{P}$ définie sur l'ensemble des événements vérifiant les trois propriétés suivantes :
 - pour tout événement A , on a : $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;
 - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
 - Pour toute suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles (pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$), on a :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

2. Lorsque l'on munit un espace probabilisable d'une telle application $\mathbb{P}$, on appelle *espace probabilisé* le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi obtenu.

Definition 6.

- Un événement A est dit *négligeable* ou *quasi-impossible* si : $\mathbb{P}(A) = 0$.
- Un événement A est dit *quasi-certain* si : $\mathbb{P}(A) = 1$. Dans ce cas, on dit que la proposition (la phrase) qui définit l'événement A est *presque sûre*.

Remarque 2. Avec cette définition, les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. L'événement impossible $\emptyset$ est quasi-impossible. Attention, la réciproque est fausse.
2. L'événement certain Ω est quasi-certain. Attention, la réciproque est fausse.

Exemple 8. Pour un dé équilibré, la probabilité de tomber sur la face 6 vaut $1/6$, mais pour un dé pipé, il est tout à fait possible que l'événement « le dé tombe sur 6 » soit quasi-certain.

3.2 Propriétés des probabilités

Proposition 3. Soient A, B, C des événements.

- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Si $B \subset A$, alors $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$.
- $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (l'application $\mathbb{P}$ est croissante)
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ ou, de manière équivalente, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$.
- Formule du crible :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &- \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &+ \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Proposition 4. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements. Alors :

$$\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) &= \mathbb{P} \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) && \text{(car les } A_i \text{ sont deux à deux incompatibles)} \\ &= \mathbb{P}(\Omega) && \text{(par définition d'un système complet d'événements)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

3.3 Le cas de l'équiprobabilité

Lorsque l'on travaille sur un univers fini, il est fréquent de considérer l'application probabilité pour laquelle toutes les issues ont la même probabilité de se produire.

Rappelons que $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des parties de Ω . Dans ce contexte, il s'agit de l'ensemble de tous les événements possibles.

Théorème 3. Soit Ω un univers fini. On peut écrire : $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ (les ω_i sont les issues possibles de l'expérience).

1. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires i.e. telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$$

2. Cette probabilité est appelée probabilité uniforme et est définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ A &\mapsto \mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues de l'expérience}} \end{aligned}$$

Si l'univers fini Ω est muni de la probabilité uniforme, les calculs des probabilités se ramènent à du dénombrement.

Exercice 1 : Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules noires. On considère l'expérience consistant à tirer une boule dans cette urne et on fait l'hypothèse de l'équiprobabilité des résultats. On note A l'événement « on tire une boule rouge » et B l'événement « on tire une boule noire ». Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 2 : On effectue 6 lancers d'un dé cubique équilibré. L'univers est ici $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^6$. Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = 6^6$. Il est muni de la probabilité uniforme (cela revient à supposer que le dé est non truqué). On considère les événements :

A : « On n'obtient aucun 6 lors des lancers »

B : « On obtient les 6 chiffres (dans un ordre quelconque) lors des lancers »

Calculer la probabilité de ces deux événements.

Démonstration. Une issue réalisant A est entièrement déterminée par :

- le choix du résultat du premier lancer : 5 possibilités.
- le choix du résultat du deuxième lancer : 5 possibilités.
- ...
- le choix du résultat du sixième lancer : 5 possibilités.

On a alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{5^6}{6^6} = \frac{15625}{46656} \approx 33\%$$

Une issue réalisant B est entièrement déterminée par :

- le choix du résultat du premier lancer : 6 possibilités.
- le choix du résultat du deuxième lancer : 5 possibilités.
- ...
- le choix du résultat du sixième lancer : 1 possibilité.

On a alors :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{3 \times 3 \times 6^2} = \frac{5}{324} \approx 1,5\%$$

□

Exercice 3 : On considère un jeu de 32 cartes. L'expérience consiste à effectuer un tirage (simultané) de 5 cartes. L'univers Ω est ici l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des 32 cartes. Autrement dit, Ω contient toutes les mains possibles. Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = \binom{32}{5}$. Les tirages étant considérés comme équiprobables, l'univers Ω est muni de la probabilité uniforme, notée $\mathbb{P}$.

On considère les événements :

A : « On obtient un carré »

B : « On obtient exactement une carte pique »

Calculer la probabilité de ces deux événements.

Démonstration. Un 5-tirage (une main de 5 cartes) réalisant A est entièrement déterminé par :

- le choix de la hauteur du carré : $\binom{8}{1} = 8$ possibilités.
- le choix de la carte restante : $\binom{28}{1} = 28$ possibilités. (la carte restante n'est pas une des 4 cartes du carré)

On a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{8 \times 28}{\frac{32!}{5! 27!}} = \frac{1}{31 \times 29} \approx 0,11\%$$

Un 5-tirage (une main de 5 cartes) réalisant B est entièrement déterminé par :

- le choix de la hauteur du pique : $\binom{8}{1} = 8$ possibilités.
- le choix des 4 cartes restantes : $\binom{24}{4}$ possibilités. (les 4 cartes restantes ne sont pas des piques)

Ainsi :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card} \Omega} = \frac{8 \times \frac{24!}{4! 20!}}{\frac{32!}{5! 27!}} = \frac{23 \times 11 \times 3}{31 \times 29 \times 2} \approx 42\%$$

□

Un exemple fondamental : le tirage dans une urne

Il existe deux manières de décrire ce que contient une urne : soit l'énoncé indique le **nombre** de boules de chaque couleur, soit il indique la **proportion** de boules de chaque couleur. Sans indication contraire de l'énoncé, il faut toujours considérer qu'un tirage dans une urne se fait de manière équiprobable (toutes les boules ont la même chance d'être obtenues).

1. Considérons une urne contenant a boules rouges et b boules bleues. On effectue un unique tirage dans cette urne au hasard. Notons A l'événement : « on tire une boule rouge ». Alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de boules rouges}}{\text{nombre total de boules}} = \frac{a}{a+b}$$

2. Considérons une urne contenant des boules rouges en proportion p et des boules bleues en proportion q , de telle sorte que $p+q=1$. On effectue un unique tirage dans cette urne au hasard. Notons A l'événement : « on tire une boule rouge ». Alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de boules rouges}}{\text{nombre total de boules}} = p$$

4 Probabilité conditionnelle

4.1 Définition

Théoreme 4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On considère l'application $\mathbb{P}_A$ suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A &: \mathcal{A} \rightarrow [0,1] \\ B &\mapsto \mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{aligned}$$

Alors $\mathbb{P}_A$ est une probabilité, appelée probabilité conditionnelle relative à A .

Pour tout événement B , $\mathbb{P}_A(B)$ est appelé la probabilité de B sachant A .

Proposition 5. Toutes les propriétés de $\mathbb{P}$ sont également valables pour $\mathbb{P}_A$.

4.2 Formules liées aux probabilités conditionnelles

4.2.1 Formule des probabilités composées

Théorème 5. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements.

1. Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B)$
2. Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \mathbb{P}_B(A)$
3. On a alors, si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$: $\mathbb{P}(B) \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B)$

On peut généraliser le résultat précédent.

Théorème 6 (Formule des probabilités composées). Soit $m \geq 2$ un entier. Soient $A_1, \dots, A_m$ des événements. On suppose que : $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}) \neq 0$. On a alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}}(A_m)$$

En particulier :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \end{aligned}$$

Exercice 4 : Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. L'expérience consiste à tirer successivement 3 boules (sans remise). On considère les événements :

A : « Les trois boules tirées sont blanches »

C : « On obtient une boule noire pour la première fois au deuxième tirage »

Calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(C)$.

Démonstration. On pose, pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$:

B_i : « On obtient une boule blanche au i^{e} tirage »

N_i : « On obtient une boule noire au i^{e} tirage »

(il s'agit des événements élémentaires pour cette expérience)

On commence par écrire les événements A et C à l'aide des événements élémentaires :

$$\begin{aligned} A &= B_1 \cap B_2 \cap B_3 \\ C &= B_1 \cap N_2 \end{aligned}$$

Détaillons l'obtention de la formule pour C .

C est réalisé $\iff$ on obtient une boule noire pour la première fois au deuxième tirage

$\iff$ on obtient une boule noire au 2^e tirage
ET on n'a pas obtenu de boule noire avant le 2^e tirage

$\iff$ on obtient une boule noire au 2^e tirage
ET on obtient une boule blanche au 1^{er} tirage

Sous réserve que l'on puisse écrire chacun des éléments, la formule des probabilités composées donne :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3)$$

Calculons les trois termes :

- $\mathbb{P}(B_1) = \frac{5}{13}$.
- Si B_1 est réalisé, alors le 2^e tirage s'effectue dans une urne contenant 4 boules blanches et 8 boules noires. Ainsi, $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{4}{12}$.
- Si $B_1 \cap B_2$ est réalisé, alors le 3^e tirage s'effectue dans une urne contenant 3 boules blanches et 8 boules noires. Ainsi, $\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{3}{11}$.

Finalement :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{5 \times 4 \times 3}{13 \times 12 \times 11} = \frac{5}{11 \times 13} \simeq 3,5\%$$

On procède de même pour le calcul de $\mathbb{P}(C)$.

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(N_2) = \frac{5}{13} \times \frac{8}{12} = \frac{5 \times 2}{13 \times 3} = \frac{10}{39} \simeq 25,6\%$$

□

4.2.2 Formule des probabilités totales

Théoreme 7 (Formule des probabilités totales). Soit $I \subset \mathbb{N}$ et soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements. Pour tout événement B , on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

Si on suppose de plus que, pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$$

Remarque 8. Il faut penser à la formule des probabilités totales dès qu'il faut faire une disjonction de cas pour être en mesure de calculer une probabilité.

Cas particulier du système complet d'événements $(A, \bar{A})$. Soit A un événement. La famille $(A, \bar{A})$ est alors un système complet d'événements. Pour tout événement B :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

Si de plus $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\bar{A}) \neq 0$, alors on peut écrire :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$$

Cas particulier du système complet d'événements $(A_i)_{i \in [1, n]}$. Considérons un système complet d'événements $(A_i)_{i \in [1, n]}$. Pour tout événement B :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

Si de plus, pour tout $i \in [1, n]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors on peut écrire :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$$

Cas particulier du système complet d'événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Considérons un système complet d'événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Pour tout événement B :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

Si de plus, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors on peut écrire :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$$

Exercice 5 : On considère à nouveau l'urne contenant 5 boules blanches et 8 boules noires et on effectue 3 tirages successifs d'une boule dans cette urne, sans remise. Calculer la probabilité de tirer une boule noire au deuxième tirage.

Démonstration. On conserve les notations précédentes, pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$:

B_i : « On obtient une boule blanche au i^{e} tirage »
 N_i : « On obtient une boule noire au i^{e} tirage »

Il n'est pas simple de calculer la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage car le contenu de l'urne au moment du deuxième tirage **dépend** du résultat du premier tirage. On utilise donc la formule des probabilités totales pour surmonter cette difficulté.

La famille (B_1, N_1) forme un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_2) &= \mathbb{P}(B_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) \\ &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(N_2) + \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) && \text{car } \mathbb{P}(B_1) \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}(N_1) \neq 0 \\ &= \frac{5}{13} \times \frac{8}{12} + \frac{8}{13} \times \frac{7}{12} \\ &= \frac{5}{13} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{13} \times \frac{7}{3} \\ &= \frac{5 \times 2 + 2 \times 7}{3 \times 13} \\ &= \frac{24}{3 \times 13} \\ &= \frac{8}{13} \end{aligned}$$

□

Exercice 6 : On dispose de n urnes numérotées de 1 à n . Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n - k$ boules rouges. On choisit au hasard (équiprobablement) une urne, puis on tire simultanément deux boules dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?
2. Même question si on tire les deux boules successivement et avec remise.
3. Quelle est la limite de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$?

Remarque 9. La difficulté de cet exercice réside dans le fait que la modélisation mathématique est absente. On insiste ici sur le raisonnement à mener qui est assez naturel et très fréquent dans les exercices.

La probabilité de tirer 2 boules blanches dépend de l'urne dans laquelle s'effectue le tirage :

- soit on tire dans l'urne 1 et dans ce cas ...
- soit on tire dans l'urne 2 et dans ce cas ...
- ...
- soit on tire dans l'urne n et dans ce cas ...

On voit clairement apparaître un raisonnement par disjonction de cas, ce qui signifie qu'il y a un système complet d'événements sous-jacent. L'idée ici est de tester l'événement « obtenir 2 boules » suivant chacun des cas listés précédemment. Cela correspond à utiliser la formule des probabilités totales. Il n'y a plus qu'à formaliser ces idées.

Démonstration. On note A_k : « le tirage s'effectue dans l'urne k » (pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$).

On note B : « on tire deux boules blanches ».

1. La famille $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements.
On en déduit, par la formule des probabilités totales que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k \cap B) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B) && \text{car } \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n} \neq 0 \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\mathbb{P}_{A_k}(B) = \frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{\frac{k!}{2!(k-2)!}}{\frac{n!}{2!(n-2)!}} = \frac{k!}{2!(k-2)!} \times \frac{2!(n-2)!}{n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

En effet, si A_k est réalisé, le tirage se fait dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n - k$ boules noires. Un 2-tirage contenant 2 boules blanches est entièrement déterminé par : le choix des 2 boules blanches parmi les k présentes : $\binom{k}{2}$ possibilités. Il y a donc $\binom{k}{2}$ tels 2-tirages.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^n k(k-1) \\ &= \frac{1}{n^2(n-1)} \left(\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \right) \\ &= \frac{1}{n^2(n-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{6n^2(n-1)} ((2n+1) - 3) = \frac{n(n+1)}{6n^2(n-1)} 2(n-1) \\ &= \frac{n(n+1)}{6n^2(n-1)} 2(n-1) = \frac{1}{3} \frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

2. Par le même raisonnement, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k \cap B) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B) \quad \text{car } \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n} \neq 0\end{aligned}$$

Dans le cas d'un tirage successif avec remise, on a, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\mathbb{P}_{A_k}(B) = \frac{k \times k}{n \times n}$$

En effet, si A_k est réalisé, le tirage se fait dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n - k$ boules noires. Un 2-tirage contenant 2 boules blanches est entièrement déterminé par :

- le choix de la première boule blanche tirée parmi les k présentes : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.
- le choix de la deuxième boule blanche tirée parmi les k présentes : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.

Il y a donc k^2 tels 2-tirages. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{k \times k}{n \times n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \frac{n+1}{n} \frac{2n+1}{n} = \frac{1}{3} \frac{n+1}{n} \frac{n+\frac{1}{2}}{n}\end{aligned}$$

$$3. \quad \frac{1}{3} \frac{n+1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3} \frac{n}{n} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \frac{n+1}{n} \frac{n+\frac{1}{2}}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3} \frac{n}{n} \frac{n}{n} = \frac{1}{3}$$

Dans les deux cas, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$.

□

4.2.3 Formule de Bayes

Théoreme 10 (Formule de Bayes). Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Exercice 7 : On considère à nouveau l'urne contenant 5 boules blanches et 8 boules noires et on effectue 3 tirages successifs d'une boule dans cette urne, sans remise. Sachant que le second tirage a donné une boule blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?

Démonstration. On conserve les notations précédentes, pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$:

B_i : « On obtient une boule blanche au i^{e} tirage »

N_i : « On obtient une boule noire au i^{e} tirage »

Il n'est pas simple de faire ce calcul car on suppose connue une **information du futur** pour calculer la probabilité d'un événement dépendant du passé par rapport à cette information. La formule de Bayes permet de « retourner » le conditionnement, pour le remettre dans l'ordre chronologique.

D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{B_2}(B_1) = \frac{\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)}{\mathbb{P}(B_2)}$$

Il reste à calculer $\mathbb{P}(B_2)$ à l'aide de la formule des probabilités totales, comme lors de l'exemple précédent. La famille (B_1, N_1) forme un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(N_1 \cap B_2) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}(N_1) \mathbb{P}_{N_1}(B_2) && \text{car } \mathbb{P}(B_1) \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}(N_1) \neq 0 \\ &= \frac{5}{13} \times \frac{4}{12} + \frac{8}{13} \times \frac{5}{12} \\ &= \frac{5}{13} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{13} \times \frac{5}{3} \\ &= \frac{15}{13 \times 3} \\ &= \frac{5}{13} \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbb{P}_{B_2}(B_1) = \frac{\frac{5}{13} \times \frac{4}{12}}{\frac{5}{13}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

□

Exercice 8 : Deux urnes sont remplies de boules. La première contient 10 boules noires et 30 boules blanches. La seconde contient 20 boules noires et 20 boules blanches. On tire une des urnes au hasard, de façon équiprobable, et dans cette urne, on tire une boule au hasard. La boule est blanche. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré cette boule dans la première urne sachant qu'elle est blanche ?

Exercice 9 : On considère une population touchée par une maladie rare. Cette maladie touche une personne sur 10000. Un test de dépistage est proposé et donne les résultats suivants :

1. si une personne est malade, le test est positif à 99%,
2. si une personne est saine, le test peut aussi se révéler positif à hauteur de 0,1% (on parle de *faux positif*).

Quelle est la probabilité qu'une personne dont le test s'est révélé négatif soit en réalité malade ?

5 Indépendance en probabilité

5.1 Indépendance de deux événements

Définition 7. Soient A et B deux événements. On dit que A et B sont *indépendants* (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Remarque 11. Il ne faut pas confondre cette propriété, **liée au choix d'une probabilité** $\mathbb{P}$ avec celle d'incompatibilité qui ne dépend que des événements ! Si A et B sont deux événements non quasi-impossibles, alors A et B ne peuvent pas être simultanément incompatibles et indépendants.

Théorème 12. Soient A et B deux événements.

- Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors on a :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_A(B)$$

(Savoir que A a été réalisé n'influe pas sur la probabilité que B soit réalisé)

- Si $\mathbb{P}(B) \neq 0$, alors on a :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)$$

Remarque 13. La notion d'indépendance n'est pas une notion intrinsèque aux événements : elle dépend fortement de la probabilité choisie. Autrement dit, deux événements peuvent être indépendants pour une probabilité et dépendants pour une autre.

Exemple 9. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 faces et les événements :

A : « le résultat obtenu est inférieur ou égal à deux »

B : « le résultat obtenu est supérieur ou égal à quatre »

On cherche à déterminer si A et B sont indépendants suivant deux probabilités différentes.

Cas 1 : dé équilibré. L'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est donc muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}^1$ déterminée par :

$$\mathbb{P}^1(\{1\}) = \dots = \mathbb{P}^1(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

$$\text{On a } \mathbb{P}^1(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre d'issues totales}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

On peut donc calculer $\mathbb{P}_A^1(B)$, probabilité d'obtenir un résultat supérieur à 4 sachant que le résultat obtenu est inférieur à 2. Il est clair que $\mathbb{P}_A^1(B) = 0$.

$$\text{Or } \mathbb{P}^1(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \text{ D'où } \mathbb{P}^1(B) \neq \mathbb{P}_A^1(B).$$

Ainsi, les événements A et B ne sont pas indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}^1$ (bien qu'ils soient incompatibles!).

Cas 2 : dé pipé. Le dé considéré permet d'obtenir 1 avec la probabilité 1. Autrement dit, l'espace est muni de la probabilité $\mathbb{P}^2$ déterminée par :

$$\mathbb{P}^2(\{1\}) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^2(\{2\}) = \dots = \mathbb{P}^2(\{6\}) = 0$$

On a $\mathbb{P}^2(A) = 1 \neq 0$, on peut donc calculer $\mathbb{P}_A^2(B)$, probabilité d'obtenir un résultat supérieur à 4 sachant que le résultat obtenu est inférieur à 2. On a encore $\mathbb{P}_A^2(B) = 0$.

Or, étant donné le dé considéré, la probabilité d'obtenir un résultat supérieur à 4 est $\mathbb{P}^2(B) = 0 = \mathbb{P}_A^2(B)$.

Ainsi, les événements A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}^2$.

Proposition 6. Soient A et B deux événements indépendants. Alors :

- Les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- Les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.
- Les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 10 : Soient A et B deux événements. Démontrer que, si A est quasi-certain ou quasi-impossible, alors A et B sont indépendants.

Démonstration. 1. On a $A \cap B \subset A$. On en déduit donc que : $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0$. Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$, ce qui démontre que A et B sont indépendants pour $\mathbb{P}$.

2. Remarquons que $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0$ donc $\overline{A}$ et B sont indépendants d'après la première question. D'après la proposition du cours, il vient que A (le complémentaire de $\overline{A}$) et B sont également indépendants.

□

5.2 Indépendance mutuelle d'une famille d'événements

Definition 8. Soient $I \subset \mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements. On dit que les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont *mutuellement indépendants* (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si, pour tout ensemble fini $J \subset I$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Cas particulier pour une famille de trois événements. Les événements A_1, A_2, A_3 sont mutuellement indépendants si :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2) \\ \text{ET } \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_3) \\ \text{ET } \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_2) \mathbb{P}(A_3) \\ \text{ET } \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2) \mathbb{P}(A_3) \end{aligned}$$

Cas particulier pour une famille de n événements. On retiendra que, si $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$$

Exemple 10. On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux fois un dé à 6 faces et les événements :

A : « le premier chiffre est pair »
 B : « le second chiffre est impair »
 C : « la somme des chiffres est paire »

Démontrons que A , B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

- On a $A \cap B \cap C = \emptyset$ donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- Par équiprobabilité : $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$.
- On remarque que $C = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ donc

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- D'où : $\mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq 0 = \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

Théoreme 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements. On pose, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$. Si $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors $B_1, \dots, B_n$ sont mutuellement indépendants.

Exemple 11. Si $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, alors $\overline{A_1}, A_2, \dots, A_n$ sont indépendants.

Quelle indépendance pour une succession de tirages dans une urne ?

Deux choses à retenir :

- si les tirages sont sans remise, ou avec un quelconque protocole qui modifie ce que contient l'urne, les tirages ne sont pas indépendants ;
- si le contenu de l'urne est fixé à l'avance et que les tirages se font avec remise, alors les tirages sont indépendants.

Attention, si le contenu de l'urne est choisi aléatoirement, alors les tirages ne sont pas indépendants en général, même si ils se font avec remise.

6 Complément hors-programme : théorème de la limite monotone

Théorème 15 (Théorème de la limite monotone). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$.

1. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$) alors :

(a) la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge.

$$(b) \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \supset A_{n+1}$) alors :

(a) la suite $(\mathbb{P}(A_n))$ converge.

$$(b) \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Exemple 12. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [X \geq n]$.

Calculer $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$.

Théorème 16. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$. (on ne suppose pas ici que la suite (A_n) est monotone !)

1. (a) La suite $\left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)\right)_n$ converge.

$$(b) \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$$

2. (a) La suite $\left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)\right)_n$ converge.

$$(b) \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

Remarque 17.

1. Il faut bien noter que l'on ne suppose pas, dans ce dernier résultat, que la suite (A_n) est croissante. Pour pouvoir utiliser le théorème de la limite monotone on a donc construit la suite auxiliaire $\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$ qui est une suite croissante d'événements.
2. L'intérêt de ces théorèmes est de ramener un calcul de probabilité d'une intersection (resp. union) infinie au calcul de probabilité d'une intersection (resp. union) finie.

Exemple 13. On considère l'expérience consistant à effectuer une infinité de lancers d'un dé à 6 faces équilibré. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants (on reviendra là dessus dans la suite). Quelle est la probabilité de n'obtenir que des 6 lors de la partie ?

Tous les raisonnements sur les exercices de probabilité commencent par :

1. une formalisation avec nommage des événements les plus basiques,
2. une décomposition de l'événement dont on cherche la probabilité en fonction des événements précédents.

Dans le cadre de cet exercice :

1. On note, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, F_i : « on obtient 6 au $i^{\text{ème}}$ lancer ».
2. Notons A : « on n'obtient que des 6 lors de la partie ». On a alors :

$$A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i$$

D'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n F_i\right)$$

Il s'agit donc de calculer $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n F_i\right)$. Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n F_i\right) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(F_i) && \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 && \text{(car } \frac{1}{6} \in]-1, 1[) \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{P}(A) = 0$. En particulier, l'événement A est négligeable.

Question bonus :

Décrire avec des quantificateurs et avec une phrase les événements $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} F_k$ et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} F_k$.