

DS1

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import matplotlib.pyplot as plt`.

Exercice 1

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A + I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

2. On pose $E_{-1}(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = -U\}$.

a) Résoudre le système : $(S) \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$

b) Déterminer $E_{-1}(A)$.

c) En déduire que $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_{-1}(A)$.

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = T^n$.

4. a) Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -I + N$.

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N .

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T .

5. a) Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = (-1)^{n+1} ((n-1)I + nA)$.

b) Vérifier que la formule trouvée à la question 5.a) reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

c) (Cubes uniquement) Montrer : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$.

d) (Cubes uniquement) Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

2. a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$u : x \mapsto (1 - x)e^x - 1$$

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Dresser le tableau de variations de f .

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
(Pour les carrés, on admettra que $f'(0) = -\frac{1}{2}$)

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α , que l'on calculera.

4. a) Établir : $\forall x \in [0, +\infty[, e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.

b) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.

c) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

7. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

8. Si on ne connaissait pas la valeur de α , comment aurait-on pu déterminer un entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$? Écrire le programme correspondant en **Python**.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} f(t) dt.$$

9. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

10. a) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq G(x) \leq xf(x)$.

En déduire la limite de G en $+\infty$.

b) Montrer : $\forall x \in]-\infty, 0], G(x) \leq xf(x)$.

En déduire la limite de G en $-\infty$.

11. Dresser le tableau de variations de G . On n'essaiera pas de calculer $G(\ln(3))$.

Exercice 3

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

Partie I : Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Compléter la fonction **Python** suivante, qui prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel x , pour qu'elle renvoie le réel $P_n(x)$.

```

1 def P(n, x):
2     S = 0
3     for k in _____ :
4         S = _____
5     return S

```

2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

où P'_n désigne la dérivée de P_n .

3. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n .

4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

5. a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right)$$

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2) \geq 0$.

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n , et que :

$$1 < x_n \leq 2$$

7. Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et ε un réel strictement positif.

On cherche à déterminer une valeur approchée de x_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε . On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 1 et 2.
- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.

On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de P_n sur $[1, 2]$, en distinguant les cas $P_n(c) < 0$ et $P_n(c) \geq 0$, on peut déterminer si x_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$. Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.

- On renvoie finalement la valeur $\frac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de x_n à ε près.

Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un entier n supérieur ou égal à 1 et un réel ε strictement positif (représenté par `eps`), et renvoyant une valeur approchée de x_n à ε près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```

1  def approx_x(n, eps):
2      a = 1
3      b = 2
4      while _____ :
5          c = (a+b)/2
6          if P(n, c) < 0:
7              _____
8          else:
9              _____
10         return (a+b)/2

```

Partie II : Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

8. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$$

9. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt$$

10. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1, +\infty[$:

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$$

11. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$$

puis

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln(2)}}{\sqrt{n}}$$

12. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 4

On admet le résultat suivant, qui sera vu en cours plus tard dans le chapitre sur les séries :

Théorème 1. (*Critère d'équivalence*)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

Alors
$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}$$

Remarque : le critère est encore valable lorsque les séries sont à termes négatifs.

Soit $\theta \in]2, +\infty[$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+\theta} u_n \end{cases}$$

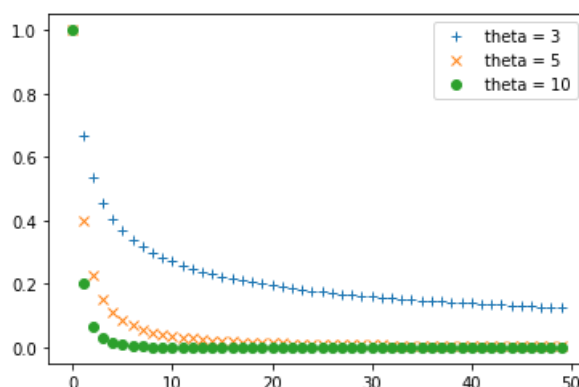
1. *Informatique.*

a) Écrire une fonction **Python**, nommée `premTermeU`, qui :

- prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel `theta` strictement supérieur à 2,
- renvoie un tableau numpy (ou une liste, au choix) qui contient les n premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Écrire un script **Python**, utilisant la fonction précédente, qui permette de tracer les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $\theta = 5$. On utilisera l'option graphique `'x'`.

c) On représente ci-dessous le tracé obtenu pour plusieurs valeurs de θ :



Que peut-on conjecturer sur la suite (u_n) ?

2. a) Montrer : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

3. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right)$$

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\infty$, puis que $\ell = 0$.

(Indication : utiliser le critère d'équivalence)

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On introduit les suites (v_n) et (w_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = n^\alpha u_n \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = (\alpha + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{\theta}{2n} \right)$$

b) (Cubes uniquement) Montrer, à l'aide d'un développement limité, que :

$$w_n = (\alpha - a) \frac{1}{n} + \frac{b - \alpha}{2} \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

où a et b sont deux réels que l'on exprimera en fonction de θ .

c) Montrer qu'il existe une unique valeur de α (que l'on précisera et que l'on notera γ) pour laquelle la série $\sum w_n$ converge.

(Indication : utiliser le critère d'équivalence)

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum_{k=1}^{n-1} w_k$ en fonction de u_n et de θ .

e) En déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^\gamma}$$