

DS1 (barème)

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les bibliothèques `numpy` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import matplotlib.pyplot as plt`.

Exercice 1 (librement inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A + I)^2$.

- 1 pt : $(A + I)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

- 1 pt : $(A + I)^2 = A^2 + 2A + I$

- 1 pt : $A^{-1} = -A - 2I$

2. On pose $E_{-1}(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = -U\}$.

a) Résoudre le système : $(S) \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$

- 2 pts : $(S) \iff z = -2x + y$

Aucun point si le pivot de Gauss est mal fait

b) Déterminer $E_{-1}(A)$.

- 1 pt : résolution système $AU = -U \iff z = -2x + y$ ou $AU = -U \iff y = 2x + z$

- 2 pts : $E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ou $E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

c) En déduire que $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_{-1}(A)$.

- 1 pt : $E_{-1}(A)$ est un sev de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

- 1 pt : famille génératrice de $E_{-1}(A)$

- 1 pt : famille libre

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

- 1 pt : méthode correcte et obtention de l'inversibilité de P

- 2 pts : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1 pt pour $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ou $AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $P^{-1}AP = T$

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = T^n$.

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

4. a) Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -I + N$.

- 1 pt : $N = T + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- 1 pt : penser à donner $N^0 = I$ et $N^1 = N$

- 1 pt : $N^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : $N^k = 0$ pour $k \geq 2$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N .

- 1 pt : $-I$ et N commutent

- 1 pt : découpage valable car $n \geq 1$

- 1 pt : $\forall k \geq 2, N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : $I^{n-k} = I$

- 1 pt : $T^n = (-1)^n I + (-1)^{n+1} n N$

- 1 pt : cas $n = 0$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T .

- 1 pt : $T^n = (-1)^n (1 - n) I + (-1)^{n+1} n T$

5. a) Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = (-1)^{n+1} ((n-1)I + nA)$.

- 1 pt

b) Vérifier que la formule trouvée à la question 5.a) reste valable pour $n = -1$.

- 1 pt

Aucun point si erreur de logique.

Exercice 2 (EML 2009)

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- 1 pt : continuité sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

- 1 pt : continuité en 0

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

- 1 pt : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

- 1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$

c) Montrer : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$.

- 1 pt : $(e^x - 1)^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$

- 1 pt : $(1-x)e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

d) Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

- 1 pt : $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1+x-e^x}{x(e^x - 1)}$

- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$

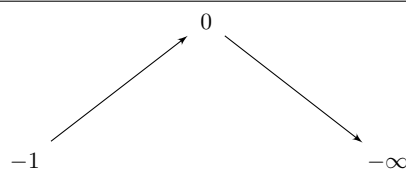
- 1 pt : f' est continue en 0

2. a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$u : x \mapsto (1-x)e^x - 1$$

- 1 pt : u dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = -xe^x$ (0 s'il n'est pas fait mention de la dérivabilité de u)

- 1 pt : variations de u

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $u'(x)$	+		-
Variations de u			

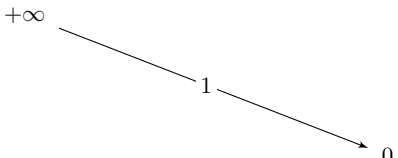
b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.

- 1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \leq 0$
- 1 pt : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) < 0$
- 1 pt : $f'(0) = -\frac{1}{2} < 0$

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

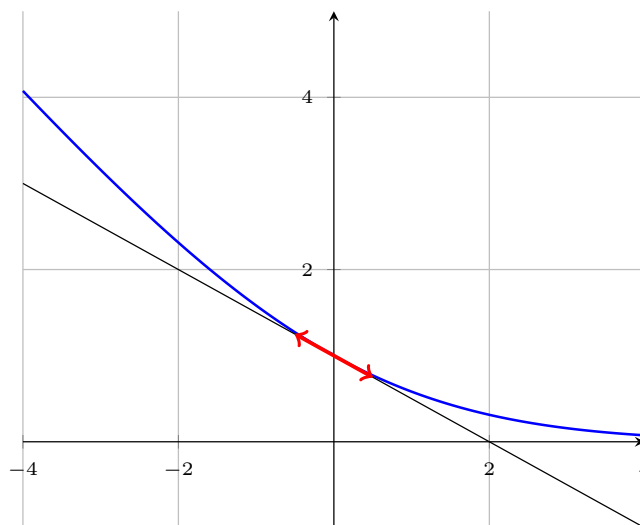
Dresser le tableau de variations de f .

- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées
- 1 pt : TV

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-		
Variations de f	$+\infty$ 		

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

- 4 pts : 1 pt pour tangente en 0, 2 pts pour cohérence courbe, 1 pt propreté



Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α , que l'on calculera.

- 1 pt : 0 n'est pas solution
- 1 pt : $\alpha = \ln(2)$ seule solution sur $\mathbb{R}^*$

Aucun point si le cas 0 n'est pas correctement traité à part.

4. a) Établir : $\forall x \in [0, +\infty[, e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.

- 1 pt : $g : x \mapsto e^{2x} - 2xe^x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2e^x(e^x - 1 - x)$
- 2 pts : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ (1 pt pour convexité, 1 pt pour tangente en 0)

b) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.

- 1 pt

c) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

- 1 pt : $\forall x \in [0, +\infty[, f'(x) < 0$

- 1 pt : $f'(0) \geq -\frac{1}{2}$

- 1 pt : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) \geq -\frac{1}{2}$

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

- 1 pt : pour tout $x \in]0, +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

- 1 pt : IAF bien écrite avec les bons quantificateurs

- 1 pt : $(u_n, \alpha) \in [0, +\infty[^2$

5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

- 1 pt : $-1 < \frac{1}{2} < 1$
- 1 pt : thm d'encadrement

7. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

- 4 pts : 1 pt initialisation, 2 pts boucle while, 1 pt print

```
1  n = 0
2  u = 1
3  while np.abs(u - np.log(2)) >= 10**(-9):
4      u = u / (np.exp(u) - 1)
5      n += 1
6  print(n)
```

8. Si on ne connaissait pas la valeur de α , comment aurait-on pu déterminer un entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$? Écrire le programme correspondant en **Python**.

- 3 pts : 2 pts $N = \left\lceil \frac{9 \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$, 1 pt `int(np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2)))`

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} f(t) dt.$$

9. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- 1 pt : f continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
- 1 pt : $G(x) = F(2x) - F(x)$
- 1 pt : G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
- 1 pt : $G'(x) = 2f(2x) - f(x)$
- 1 pt : $G' : x \mapsto \begin{cases} \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

10. a) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq G(x) \leq xf(x)$.

En déduire la limite de G en $+\infty$.

- 1 pt : $\forall t \in [x, 2x], 0 \leq f(t) \leq f(x)$
- 2 pts : $0 \leq G(x) \leq xf(x)$ (dont 1 pt pour $x \leq 2x$ car $x \geq 0$)
- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ (croissances comparées)
- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$ (thm d'encadrement)

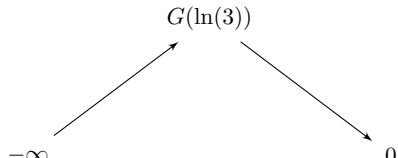
- b) Montrer : $\forall x \in]-\infty, 0], G(x) \leq xf(x)$.

En déduire la limite de G en $-\infty$.

- 1 pt : $\forall t \in [2x, x], f(t) \geq f(x)$
- 2 pts : $G(x) \leq xf(x)$ (dont 1 pt pour $2x \leq x$ car $x \leq 0$)
- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = -\infty$

11. Dresser le tableau de variations de G . On n'essaiera pas de calculer $G(\ln(3))$.

- 2 pts

x	$-\infty$	$\ln(3)$	$+\infty$
Signe de $G'(x)$	+	0	-
Variations de G			

Exercice 3 (EML 2002)

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

Partie I : Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Compléter la fonction **Python** suivante, qui prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel x , pour qu'elle renvoie le réel $P_n(x)$.

```

1 def P(n, x):
2     S = 0
3     for k in _____ :
4         S = _____
5     return S

```

- 2 pts : for k in range(1, 2*n+1) :
- 2 pts : S = S + (-1)**k * x**k / k

2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

où P'_n désigne la dérivée de P_n .

- 1 pt : $-x \neq 1$
- 1 pt : $2n$ est pair
- 1 pt : calcul correct

3. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n .

- 1 pt : $P'_n(x) > 0 \iff x > 1$ et $P'_n(x) = 0 \iff x = 1$
- 1 pt : $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty$
- 1 pt : TV

x	0	1	$+\infty$
Signe de $P'_n(x)$	-	0	+
Variations de P_n			

4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

- 1 pt : P_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$ donc $P_n(1) < P_n(0) = 0$

5. a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right)$$

- 2 pts : calcul correct

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2) \geq 0$.

- 1 pt : $2 \in [0, +\infty[$

- 1 pt : $P_{n+1}(2) - P_n(2) = 2^{2n+1} \frac{2n}{(2n+1)(2n+2)} \geq 0$ donc $(P_n(2))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

- 1 pt : $P_1(2) = -2 + \frac{2^2}{2} = 0$

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n , et que :

$$1 < x_n \leq 2$$

- 1 pt : P_n est continue et P_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

- 1 pt : P_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $P_n([1, +\infty[) = [P_n(1), +\infty[$

- 1 pt : $0 \in [P_n(1), +\infty[$

- 1 pt : $P_n(1) < 0 = P_n(x_n) \leq P_n(2)$ donc $1 < x_n \leq 2$ par stricte croissance de P_n sur le segment $[1, 2]$

7. Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et ε un réel strictement positif.

On cherche à déterminer une valeur approchée de x_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε . On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 1 et 2.
- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.

On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de P_n sur $[1, 2]$, en distinguant les cas $P_n(c) < 0$ et $P_n(c) \geq 0$, on peut déterminer si x_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$. Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.

- On renvoie finalement la valeur $\frac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de x_n à ε près.

Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un entier **n** supérieur ou égal à 1 et un réel strictement positif **eps**, et renvoyant une valeur approchée de x_n à **eps** près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```

1  def approx_x(n, eps):
2      a = 1
3      b = 2
4      while _____ :
5          c = (a+b)/2
6          if P(n, c) < 0:
7              _____
8          else:
9              _____
10     return (a+b)/2

```

- 1 pt : while b-a > eps :

- 1 pt : a = c

- 1 pt : b = c

Partie II : Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

8. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$$

- 1 pt : $t \mapsto \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}$ est continue sur le segment $[0, x]$ donc $\int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$ existe

- 1 pt : $P_n(0) = 0$ cf question 3

- 1 pt : calcul correct

9. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt$$

- 1 pt : on évalue l'égalité précédente en $x = x_n \in]1, 2] \subset [0, +\infty[$

- 1 pt : relation de Chasles

- 1 pt : calcul correct

10. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1, +\infty[$:

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$$

- 3 pts : toute preuve correcte (étude de fonction ou inégalité de convexité)

11. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$$

puis

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln(2)}}{\sqrt{n}}$$

- 1 pt : $\frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \geq n(t - 1)$

- 1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant ($1 \leq x_n$)

- 1 pt : $\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$

- 1 pt : $(x_n - 1)^2 \leq \frac{2 \ln(2)}{n}$

- 1 pt : $x_n - 1 > 0$ et croissance de $u \mapsto \sqrt{u}$ sur $[0, +\infty[$

- 1 pt : $0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln(2)}}{\sqrt{n}}$

12. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- 1 pt : théorème d'encadrement

- 1 pt : $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

Exercice 4 (librement inspiré d'un oral HEC)

On admet le résultat suivant, qui sera vu en cours plus tard dans le chapitre sur les séries :

Théorème 1. (*Critère d'équivalence*)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

Alors
$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}$$

Remarque : le critère est encore valable lorsque les séries sont à termes négatifs.

Soit $\theta \in]2, +\infty[$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+\theta} u_n \end{cases}$$

1. Informatique.

a) Écrire une fonction **Python**, nommée `premTermeU`, qui :

- prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel `theta` strictement supérieur à 2,
- renvoie un tableau numpy (ou une liste, au choix) qui contient les n premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

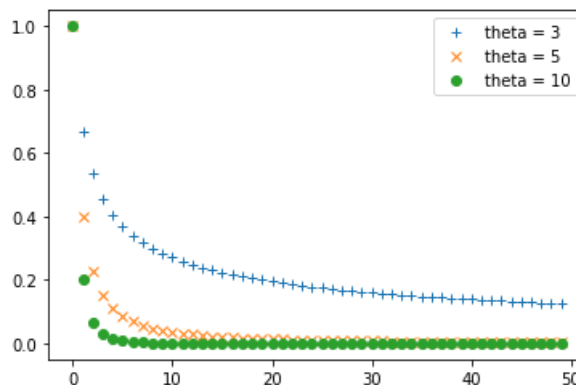
```
1 def premTermeU(n, theta):
2     T = np.zeros(n)
3     T[0] = 1
4     for k in range(n-1):
5         T[k+1] = T[k] * (2*k + 2) / (2*k + theta)
6     return T
```

- 1 pt : `T = np.zeros(n)`
- 1 pt : `T[0] = 1`
- 1 pt : `for k in range(n-1):` (pas de point si la boucle n'a pas la bonne taille)
- 1 pt : `T[k+1] = T[k] * (2*k + 2) / (2*k + theta)`
- 1 pt : bonus si tout est correct

b) Écrire un script **Python**, utilisant la fonction précédente, qui permette de tracer les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $\theta = 5$. On utilisera l'option graphique `'x'`.

- 1 pt : `theta = 5` et `n = 50`
- 1 pt : `plt.plot(premTermeU(n, theta), 'x')`
- 1 pt : bonus si tout est correct

c) On représente ci-dessous le tracé obtenu pour plusieurs valeurs de θ :



Que peut-on conjecturer sur la suite (u_n) ?

- 1 pt : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- 1 pt : (u_n) est décroissante

2. a) Montrer : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

- 1 pt : initialisation
- 1 pt : hérédité

Aucun point si la récurrence est mal rédigée.

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

- 1 pt : $u_{n+1} - u_n = u_n \frac{2 - \theta}{2n + \theta}$
- 1 pt : $u_{n+1} - u_n < 0$

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

- 1 pt : la suite (u_n) est minorée par 0 et est décroissante
- 1 pt : théorème de convergence monotone

3. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right)$$

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\infty$, puis que $\ell = 0$.

- 1 pt : la série $\sum \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right)$ est à termes négatifs
- 1 pt : $\ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\theta - 2}{2k}$
- 1 pt : critère de Riemann
- 1 pt : $u_n = e^{\ln(u_n)}$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On introduit les suites (v_n) et (w_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = n^\alpha u_n \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = (\alpha + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{\theta}{2n} \right)$$

- 2 pts : calcul correct

b) Montrer, à l'aide d'un développement limité, que :

$$w_n = (\alpha - a) \frac{1}{n} + \frac{b - \alpha}{2} \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

où a et b sont deux réels que l'on exprimera en fonction de θ .

- 1 pt : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$

- 1 pt : $(\alpha + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{\alpha + 1}{n} - \frac{\alpha + 1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$

- 1 pt : $\ln \left(1 + \frac{\theta}{2n} \right) = \frac{\theta}{2n} - \frac{\theta^2}{8n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$

- 1 pt : $a = \frac{\theta}{2} - 1$

- 1 pt : $b = \frac{\theta^2}{4} - 1$

c) Montrer qu'il existe une unique valeur de α (que l'on précisera et que l'on notera γ) pour laquelle la série $\sum w_n$ converge.

- 1 pt : cas $\alpha \neq a$

- 3 pts : cas $\alpha = a$

- 1 pt : $b \neq a$

- 1 pt : $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b - \alpha}{2} \frac{1}{n^2}$

- 1 pt : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par critère de Riemann

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum_{k=1}^{n-1} w_k$ en fonction de u_n et de θ .

- 1 pt : télescopage

- 1 pt : $\sum_{k=1}^{n-1} w_k = \ln \left(\frac{\theta n^\alpha u_n}{2} \right)$

e) En déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^\gamma}$$

- 1 pt : $\ln \left(\frac{\theta n^\gamma u_n}{2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$

- 1 pt : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^\gamma}$ où $C = \frac{2e^S}{\theta} > 0$