

DS1 (correction)

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les bibliothèques `numpy` et `matplotlib.pyplot` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import matplotlib.pyplot as plt`.

Exercice 1 (librement inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A + I)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A + I = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Ainsi :

$$(A + I)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A + I)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

□

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Démonstration.

- D'après la question précédente : $(A + I)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :

$$(A + I)^2 = A^2 + 2A + I \quad \begin{array}{l} \text{(car les matrices } A \\ \text{et } I \text{ commutent)} \end{array}$$

- On en déduit :

$$A^2 + 2A + I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

$$\text{donc } A^2 + 2A = -I$$

$$\text{et } A(A + 2I) = -I$$

$$\text{ainsi } A(-(A + 2I)) = I$$

On en déduit que la matrice A est inversible, d'inverse $-(A + 2I)$.

$A^{-1} = -A - 2I$

□

2. On pose $E_{-1}(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = -U\}$.

a) Résoudre le système : (S)
$$\begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases} &\xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1} \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\xLeftrightarrow{} \{ z = -2x + y \} \end{aligned}$$

□

b) Déterminer $E_{-1}(A)$.

Démonstration.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On a alors :

$$\begin{aligned} AX = -X &\iff (A + I)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ 6x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \\ &\iff \{ z = -2x + y \} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = -2x + y \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x + y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Commentaire

- Lors de la résolution du système, on choisit d'exprimer la variable z en fonction des variables x et y . Ces deux dernières variables sont alors appelées variables auxiliaires.
- Il était possible de faire d'autres choix. Par exemple :

$$AX = -X \Leftrightarrow y = 2x + z$$

On obtient alors l'expression de F suivante : $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Notons au passage : $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(il suffit de remplacer le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ par la combinaison linéaire $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$) □

c) En déduire que $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_{-1}(A)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

L'ensemble $E_{-1}(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_{-1}(A)$,

× est libre car est constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de $E_{-1}(A)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de l'espace vectoriel $E_{-1}(A)$. □

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

Démonstration.

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P .

- On effectue les opérations $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right.$$

Finalement : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Commentaire

On remarque que les deux premières colonnes de la matrice P ne sont autres que les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$. C'est ce choix qui permet d'exprimer par la suite la matrice A sous une forme plus simple. On en reparlera dans le chapitre « Réduction ».

- b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord :

$$AP = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T$$

Ainsi : $P^{-1}AP = T$.

- c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = T^n$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : P^{-1}A^nP = T^n$.

► Initialisation

- D'une part : $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$.
- D'autre part : $T^0 = I$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $P^{-1}A^{n+1}P = T^{n+1}$).

$$\begin{aligned}
 T^{n+1} &= T \times T^n \\
 &= P^{-1}AP \times P^{-1}A^nP && \text{(d'après la question précédente et par hypothèse de récurrence)} \\
 &= P^{-1}A(PP^{-1})A^nP \\
 &= P^{-1}AIA^nP = P^{-1}A^{n+1}P
 \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = T^n$.

□

4. a) Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = -I + N$.

Démonstration.

D'après l'énoncé, $N = T + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Ensuite, pour tout $k \geq 2$, $N^k = N^{k-2} \times N^2 = N^{k-2} \times 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

En conclusion : $N^0 = I$, $N^1 = N$ et pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

□

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Le résultat devra faire apparaître T^n comme combinaison linéaire de I et de N .

Démonstration.

- Les matrices $(-I)$ et N commutent car la matrice identité commute avec toutes les matrices carrées du même ordre. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.

- Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
 T^n &= (-I + N)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-I)^{n-k} N^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} I^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} I N^k \quad (\text{car : } \forall j \in \mathbb{N}, I^j = I) \\
 &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k \quad (\text{ce découpage est valable car } n \geq 1) \\
 &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k \quad (\text{car on a montré : } \forall k \geq 2, N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}) \\
 &= \binom{n}{0} (-1)^n N^0 + \binom{n}{1} (-1)^{n-1} N^1 \\
 &= (-1)^n I + n (-1)^{n-1} N \\
 &= (-1)^n (I + (-1)^{-1} n N) \\
 &= (-1)^n (I - n N) \\
 &= (-1)^n I + (-1)^{n+1} n N
 \end{aligned}$$

- Enfin : $(-1)^0 (I - 0 \cdot N) = I$ et $T^0 = I$.

La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = (-1)^n I + (-1)^{n+1} n N$.

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leq p \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=m}^p u_k + \sum_{k=p+1}^n u_k$$

(la seconde somme est nulle si $p = n$)

où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
L'argument $n \geq 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geq 2, N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.
- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter.

□

- d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T .

Démonstration.

Comme $N = T + I$, on obtient :

$$(-1)^n (I - n N) = (-1)^n (I - n (T + I)) = (-1)^n ((1 - n) I - n T) = (-1)^n (1 - n) I + (-1)^{n+1} n T$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = (-1)^n(1-n)I + (-1)^{n+1}nT$.

□

5. a) Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = (-1)^{n+1}((n-1)I + nA)$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $T^n = (-1)^{n+1}((n-1)I + nT)$.

Or : $A^n = P T^n P^{-1}$. En combinant ces deux informations, on obtient :

$$\begin{aligned} A^n &= P T^n P^{-1} = P \left((-1)^{n+1}((n-1)I + nT) \right) P^{-1} \\ &= (-1)^{n+1}((n-1)PP^{-1} + nPTP^{-1}) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (-1)^{n+1}((n-1)I + nA)$.

□

b) Vérifier que la formule trouvée à la question **5.a)** reste valable pour $n = -1$.

Démonstration.

Si $n = -1$, on obtient :

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1}((n-1)I + nA) &= (-1)^{-1+1}((-1-1)I + (-1)A) \\ &= (-2I - A) = -A - 2I \end{aligned}$$

Ainsi, la formule trouvée à la question **5.a)** reste valable pour $n = -1$.

□

Exercice 2 (EML 2009)

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction f est continue (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]0, +\infty[$ comme quotient de :
 - × $x \mapsto x$ continue (de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]0, +\infty[$ car polynomiale.
 - × $x \mapsto e^x - 1$ continue (de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $]0, +\infty[$ et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
- De même, la fonction f est continue (de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $] - \infty, 0[$.
Elle est donc continue sur $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- De plus, la fonction f est continue en 0. En effet :
 - × d'une part :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$$

× d'autre part : $f(0) = 1$.

Ainsi, on obtient bien : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

On en conclut que f est continue sur $\mathbb{R}$.

□

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
- Soit $x \in] - \infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1) - x e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x) e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{(e^x - 1) - x e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x) e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

□

c) Montrer : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$.

Démonstration. Soit $x \neq 0$.

- Tout d'abord, $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc $(e^x - 1)^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$.

- Ensuite, on a le développement limité usuel : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}(1-x)e^x &= (1-x) \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) - x - x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\end{aligned}$$

D'où $(1-x)e^x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ et finalement $(1-x)e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

On obtient alors

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}.}$$

□

d) Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

Démonstration. On a déjà vu que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0.

- Soit $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} \\ &= \frac{1 + x - e^x}{x(e^x - 1)}\end{aligned}$$

Or, d'après le développement limité usuel de e^x en 0, on a

$$1 + x - e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

et

$$x(e^x - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$$

D'où

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

- D'après la question précédente, f' est continue en 0.

On peut ainsi conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0. D'où

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}.}$$

□

2. a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$u : x \mapsto (1 - x) e^x - 1$$

Démonstration.

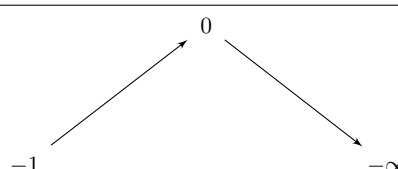
- La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$u'(x) = -x e^x$$

Comme $e^x > 0$:

$$u'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $u'(x)$	+		-
Variations de u			

- Détaillons les éléments de ce tableau.

× Tout d'abord : $u(0) = (1 - 0) e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

× Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u(x) = (1 - x) e^x - 1 = e^x - x e^x - 1$$

Or, par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.

D'où, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -1$.

× Enfin :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty$. □

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$.

Démonstration.

- La fonction u est strictement croissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Elle admet donc un maximum global, atteint uniquement en 0.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $u(x) < u(0) = 0$.

- Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{u(x)}{(e^x - 1)^2} < 0$$

En effet : $(e^x - 1)^2 > 0$ et $u(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

- Enfin, $f'(0) = -\frac{1}{2} < 0$ d'après l'énoncé.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$. □

- c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Dresser le tableau de variations de f .

Démonstration.

- Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 1 = -1$.
De plus : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

$$\text{On en déduit : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

- Ensuite :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{e^x}$$

Or, par croissances comparées : $\frac{x}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

- Avec la question 2.b), on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		—	—
Variations de f	$ \begin{array}{c} +\infty \\ \searrow \\ 1 \\ \searrow \\ 0 \end{array} $		

□

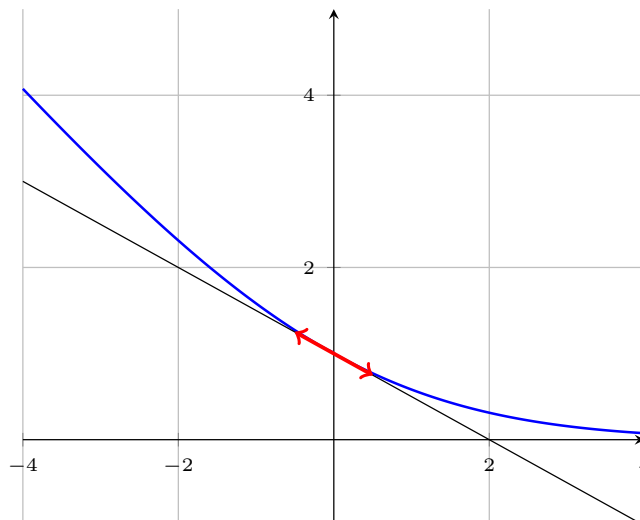
- d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Démonstration.

- Tout d'abord, déterminons l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.
Il s'agit de la droite d'équation :

$$\begin{aligned}
 y &= f(0) + f'(0)(x - 0) \\
 &= 1 - \frac{1}{2}x
 \end{aligned}$$

- On obtient le graphe suivant :



Commentaire

- On s'efforcera de traiter les questions de tracé de courbe.
En effet, ce type de question consiste uniquement à faire apparaître sur un graphique toutes les informations qu'on a recueillies dans les questions précédentes.
- Il est indispensable de faire apparaître les tangentes horizontales. Si on a déterminé d'autres tangentes ou des points d'inflexions auparavant, on doit également les faire apparaître.
- On rappelle qu'un tracé de courbe s'effectue toujours de la façon suivante :
 - 1) placer le ou les points principaux de la courbe représentative de f (ici seulement le point $(0, f(0))$)
 - 2) placer les tangentes à la courbe (ici la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0)
 - 3) tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ en prenant en compte le sens de variations de f et les limites de f .

□

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α , que l'on calculera.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x \\
 \Leftrightarrow \frac{x}{e^x - 1} &= x \\
 \Leftrightarrow e^x - 1 &= 1 \quad (\text{car } x \neq 0) \\
 \Leftrightarrow e^x &= 2 \\
 \Leftrightarrow x &= \ln(2)
 \end{aligned}$$

- Si $x = 0$, alors : $f(0) = 1$.

On en déduit que 0 n'est pas un point fixe de f .

La fonction f admet pour unique point fixe $\alpha = \ln(2)$.

□

4. a) Établir : $\forall x \in [0, +\infty[, e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.

Démonstration.

- Considérons la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \mapsto e^{2x} - 2xe^x - 1$$

- La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) = 2e^x(e^x - 1 - x)$$

Déterminons le signe de $g'(x)$.

× Comme $e^x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $e^x - 1 - x$.

× Or la fonction $h : x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que sa courbe représentative $\mathcal{C}_h$ se situe au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 0. Or cette tangente est la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= h(0) + h'(0)(x - 0) \\ &= e^0 + e^0 x = 1 + x \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$. D'où :

$$e^x - 1 - x \geq 0$$

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) \geq 0$.

- La fonction g est donc croissante. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} g(x) &\geq g(0) \\ &\parallel \\ &0 \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^{2x} - 2xe^x - 1 \geq 0$.

□

b) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.

Démonstration.

Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2(1-x)e^x - 2 + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{\cancel{2e^x} - 2xe^x - 2 + e^{2x} - \cancel{2e^x} + 1}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}.$$

□

c) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

Démonstration.

Soit $x \in [0, +\infty[$.

- Tout d'abord, d'après la question 2.a) :

$$f'(x) < 0$$

- Démontrons : $-\frac{1}{2} \leq f'(x)$. Deux cas se présentent :

× si $x \neq 0$, alors, d'après la question précédente :

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$$

Comme $2(e^x - 1)^2 > 0$, on en déduit que $f'(x) + \frac{1}{2}$ est du signe de $g(x)$.

Or, d'après la question 2.a) : $g(x) \geq 0$. On en déduit :

$$f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0$$

× si $x = 0$, alors :

$$f'(0) = -\frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$$

Finalement : $\forall x \in [0, +\infty[, f'(x) \geq -\frac{1}{2}$.

On en déduit : $\forall x \in [0, +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

□

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

Démonstration.

- D'après les questions précédentes :

× f est dérivable sur $[0, +\infty[$,

× $\forall x \in [0, +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

En effet, d'après la question précédente, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$-\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$$

$$\text{donc} \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, |f(y) - f(x)| \leq \frac{1}{2} |y - x|$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite appliquer cette inégalité à $y = u_n$ et $x = \alpha$. Pour cela, vérifions que ces deux termes appartiennent à l'intervalle $[0, +\infty[$.

× D'après le tableau de variations de la question 2.c), $[0, +\infty[$ est un intervalle stable de f .

De plus : $u_0 = 1 \geq 0$.

Ainsi, par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, +\infty[$.

× D'après la question 3. : $\alpha = \ln(2) \in [0, +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant donc l'inégalité précédente à $y = u_n \in [0, +\infty[$ et $x = \alpha \in [0, +\infty[$, on obtient :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

Or :

× $f(u_n) = u_{n+1}$, par définition de la suite (u_n) ,

× $f(\alpha) = \alpha$, car α est un point fixe de f .

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

Commentaire

- La démonstration par récurrence de la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, +\infty[$, n'était pas au coeur de cette question et la simple mention de cette récurrence suffisait sans doute à obtenir la totalité des points alloués à cette question.

- La rédaction de cette dernière aurait été la suivante.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n \in [0, +\infty[$.

► **Initialisation :**

D'après l'énoncé : $u_0 = 1 \in [0, +\infty[$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $u_{n+1} \in [0, +\infty[$).

× Par hypothèse de récurrence : $u_n \in [0, +\infty[$.

× Ainsi, d'après le tableau de variations de la question 2.c) : $f(u_n) \in [0, 1]$.

Or : $[0, 1] \subset [0, +\infty[$.

On en déduit : $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, +\infty[$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, +\infty[$. □

5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$.

► **Initialisation :**

× D'une part, d'après la question 3. : $\frac{1}{2^0} (1 - \alpha) = 1 - \ln(2)$.

× D'autre part, comme $u_0 = 1$:

$$|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = |1 - \ln(2)| = 1 - \ln(2)$$

En effet : $1 - \ln(2) \geq 0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} (1 - \alpha)$).

D'après la question 2.d) :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

Or, par hypothèse de récurrence :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$$

En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} (1 - \alpha) = \frac{1}{2^{n+1}} (1 - \alpha)$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$.

□

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

Démonstration.

• D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$.

• Or : $\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $2^{n+1} \rightarrow +\infty$.

Ainsi, par théorème d'encadrement : $|u_n - \alpha| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ceci qui équivaut à : $u_n - \alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est convergente de limite α .

□

7. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

Démonstration.

```

1  n = 0
2  u = 1
3  while np.abs(u - np.log(2)) >= 10**(-9):
4      u = u / (np.exp(u) - 1)
5      n += 1
6  print(n)
```

Détaillons les éléments de ce programme.

• **Début du programme**

La variable **n** est initialisée à 0.

La variable **u**, qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n) , est initialisée à $u_0 = 1$.

```

1  n = 0
2  u = 1
```

• **Structure itérative**

Les lignes 3 à 5 consistent à déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$. On doit donc calculer les valeurs successives de la suite (u_n) jusqu'à ce que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$. Autrement dit, on doit calculer ces valeurs successives tant que $|u_n - \alpha| \geq 10^{-9}$. Pour cela, on met en place une structure itérative (while) :

```
3 while np.abs(u - np.log(2)) >= 10**(-9):
```

Tant que $|u_n - \alpha| \geq 10^{-9}$, on calcule u_{n+1} et on stocke toujours cette valeur dans la variable u :

```
4     u = u / (exp(u) - 1)
```

On met alors à jour en conséquence la variable n : on ajoute 1 pour signaler qu'on a calculé u_{n+1} .

```
5     n += 1
```

• **Fin du programme**

À l'issue de cette boucle, la variable n contient le plus petit entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$. On affiche alors enfin la valeur de la variable n .

```
6 print(n)
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, proposer un programme **Python** correct démontre la bonne compréhension de ces mécanismes et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.

On procèdera de même dans les autres questions **Python**. □

8. Si on ne connaissait pas la valeur de α , comment aurait-on pu déterminer un entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$? Écrire le programme correspondant en **Python**.

Démonstration.

- On souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|u_n - \alpha| < 10^{-9}$$

Or, d'après la question 5., pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$$

Comme $\alpha \geq 0$, on obtient : $1 - \alpha \leq 1$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha) \leq \frac{1}{2^n}$$

- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{1}{2^N} \leq 10^{-9}$.

Si c'est le cas, on obtient alors par transitivité :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^N} \leq 10^{-9}$$

- Déterminons alors un entier N vérifiant : $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-9}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-9}$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geq 10^9 \quad (\text{par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0, +\infty[)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(2) \geq 9 \ln(10) \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{9 \ln(10)}{\ln(2)} \quad (\text{car } \ln(2) > 0)$$

L'entier $N = \left\lceil \frac{9 \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$ convient.

On obtient l'entier cherché par l'appel : `int(np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2)))`.

Commentaire

Si on ne connaît pas α et qu'on souhaite en calculer une approximation à 10^{-9} près, on pourra alors procéder comme suit.

```

1  N = int(np.ceil(9 * np.log(10) / np.log(2)))
2  u = 1
3  for k in range(N):
4      u = u / (np.exp(u) - 1)
5  print(u)
```

□

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} f(t) dt.$$

9. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt = [F(t)]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$$

La fonction $H : x \mapsto F(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $H = F \circ h$ de :

× $h : x \mapsto 2x$ qui :

- est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
- vérifie : $h(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

× F qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= (F \circ h)'(x) - F'(x) = (F' \circ h)(x) \times h'(x) - F'(x) \\ &= F'(h(x)) \times 2 - F'(x) = 2F'(2x) - F'(x) \\ &= 2f(2x) - f(x) \end{aligned} \quad \text{(car } F \text{ est une primitive de } f)$$

Deux cas se présentent alors :

× si $x \in \mathbb{R}^*$, alors :

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2f(2x) - f(x) \\ &= \frac{4x}{e^{2x} - 1} - \frac{x}{e^x - 1} \\ &= \frac{4x - x(e^x + 1)}{e^{2x} - 1} \\ &= \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} \end{aligned}$$

× si $x = 0$, alors :

$$G'(0) = 2f(2 \times 0) - f(0) = 2f(0) - f(0) = 1$$

Finalement : $G' : x \mapsto \begin{cases} \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

□

10. a) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq G(x) \leq xf(x)$.

En déduire la limite de G en $+\infty$.

Démonstration.

• Soit $x \in [0, +\infty[$.

× Soit $t \in [x, 2x]$.

$$x \leq t \leq 2x$$

$$\text{donc} \quad f(x) \geq f(t) \geq f(2x) \quad \begin{matrix} \text{(par décroissance de } f \\ \text{sur } [0, +\infty[)} \end{matrix}$$

De plus, d'après le tableau de variations de la question **2.c)** : $f(t) \geq 0$.

Ainsi, pour tout $t \in [x, 2x]$:

$$0 \leq f(t) \leq f(x)$$

× Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leq 2x$, car $x \geq 0$) :

$$\begin{array}{ccccc} \int_x^{2x} 0 \, dt & \leq & \int_x^{2x} f(t) \, dt & \leq & \int_x^{2x} f(x) \, dt \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & & G(x) & & f(x)(2x - x) = x f(x) \end{array}$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq G(x) \leq x f(x)$$

Commentaire

On retiendra que l'encadrement / la minoration / la majoration d'une intégrale s'effectue presque toujours de la façon suivante :

- 1) encadrement / minoration / majoration de son intégrande,
- 2) utilisation de la croissance de l'intégrale.

- On a l'équivalent suivant :

$$x f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{e^x}$$

Or, par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$. On en déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$.

On obtient alors :

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0,$$

$$\times \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0.$$

$$\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0.$$

□

b) Montrer : $\forall x \in]-\infty, 0]$, $G(x) \leq x f(x)$.

En déduire la limite de G en $-\infty$.

Démonstration.

- Soit $x \in]-\infty, 0]$.
- × Soit $t \in [2x, x]$.

$$2x \leq t \leq x$$

$$\text{donc} \quad f(2x) \geq f(t) \geq f(x) \quad (\text{par décroissance de } f \text{ sur } [0, +\infty[)$$

× Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($2x \leq x$, car $x \leq 0$) :

$$\begin{array}{ccc} \int_{2x}^x f(t) \, dt & \geq & \int_{2x}^x f(x) \, dt \\ \parallel & & \parallel \\ - \int_x^{2x} f(t) \, dt & & - \int_x^{2x} f(x) \, dt \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{ccc} \int_x^{2x} f(t) \, dt & \leq & \int_x^{2x} f(x) \, dt \\ \parallel & & \parallel \\ G(x) & & f(x)(2x - x) = x f(x) \end{array}$$

$$\forall x \in]-\infty, 0], G(x) \leq x f(x)$$

- D'après la question 2.c) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. On en déduit $\lim_{x \rightarrow -\infty} x f(x) = -\infty$.

Ainsi, par théorème de comparaison : $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = -\infty$.

□

11. Dresser le tableau de variations de G . On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Démonstration.

- D'après la question 9 :

$$G' : x \mapsto \begin{cases} \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Déterminons, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, le signe de $G'(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

× Étudions le signe de $(3 - e^x)$.

$$\begin{aligned} 3 - e^x \geq 0 &\Leftrightarrow 3 \geq e^x \\ &\Leftrightarrow \ln(3) \geq x \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \end{aligned}$$

× Étudions le signe de $e^{2x} - 1$.

$$\begin{aligned} e^{2x} - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow e^{2x} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow 2x \geq 0 \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \end{aligned}$$

On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	0	$\ln(3)$	$+\infty$
Signe de x	−	0	+	+
Signe de $3 - e^x$	+	+	0	−
Signe de $e^{2x} - 1$	−	0	+	+
Signe de $G'(x)$	+	+	0	−

- On obtient enfin le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	$\ln(3)$	$+\infty$
Signe de $G'(x)$	+	0	−
Variations de G	$G(\ln(3))$ $-\infty \nearrow \quad \searrow 0$		

□

Exercice 3 (EML 2002)

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

Partie I : Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Compléter la fonction **Python** suivante, qui prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel x , pour qu'elle renvoie le réel $P_n(x)$.

```

1 def P(n, x):
2     S = 0
3     for k in _____ :
4         S = _____
5     return S

```

Démonstration. Par exemple :

```

1 def P(n, x):
2     S = 0
3     for k in range(1, 2*n+1) :
4         S = S + (-1)**k * x**k / k
5     return S

```

□

2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

où P'_n désigne la dérivée de P_n .

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction P_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ car polynomiale. Soit $x \in [0, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned}
 P'_n(x) &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{k+1} x^k \\
 &= - \sum_{k=0}^{2n-1} (-x)^k \\
 &= - \frac{1 - (-x)^{2n}}{1 - (-x)} && (\text{car } -x \neq 1) \\
 &= - \frac{1 - x^{2n}}{1 + x} && (\text{car } 2n \text{ est pair}) \\
 &= \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}
 \end{aligned}$$

□

3. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n .

Démonstration. Soit $x \in [0, +\infty[$.

- $x + 1 > 0$ donc

$$P'_n(x) > 0 \iff x^{2n} - 1 > 0 \iff x^{2n} > 1 \iff x > 1 \quad (\text{car } x \geq 0)$$

- De plus,

$$P'_n(x) = 0 \iff x^{2n} - 1 = 0 \iff x^{2n} = 1 \iff x = 1 \quad (\text{car } x \geq 0)$$

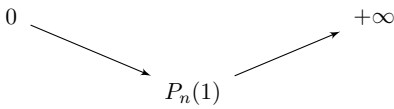
Ainsi, P_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0, 1]$.

De plus,

- $P_n(0) = 0$

- $P_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^{2n}}{2n}$ (terme dominant) donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty$.

On en déduit le tableau de variations de P_n :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $P'_n(x)$	—	0	+
Variations de P_n			

□

4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu que P_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$. On en déduit que

$$P_n(1) < P_n(0) = 0$$

□

5. a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right)$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 P_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k x^k}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2} \\
 &= P_n(x) - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \\
 &= P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right)
 \end{aligned}$$

□

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2) \geq 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente évaluée en $x = 2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(2) &= P_n(2) + 2^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} \right) \\ &= P_n(2) + 2^{2n+1} \frac{2(2n+1) - (2n+2)}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= P_n(2) + 2^{2n+1} \frac{2n}{(2n+1)(2n+2)} \end{aligned}$$

et donc $P_{n+1}(2) - P_n(2) = 2^{2n+1} \frac{2n}{(2n+1)(2n+2)} \geq 0$, ce qui prouve que la suite $(P_n(2))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

De plus, $P_1(2) = -2 + \frac{2^2}{2} = 0$. D'où :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2) \geq 0$.

□

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n , et que :

$$1 < x_n \leq 2$$

Démonstration. On sait que :

- P_n est continue sur $[1, +\infty[$
- P_n est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, P_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $P_n([1, +\infty[) = [P_n(1), +\infty[$.

Or, $P_n(1) < 0$ (cf question 4) donc $0 \in [P_n(1), +\infty[$.

On en déduit que 0 admet un unique antécédent par la fonction P_n dans $[1, +\infty[$. Autrement dit,

l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une unique solution.

On la note x_n . On sait d'après les questions 4 et 5.b) que

$$P_n(1) < 0 = P_n(x_n) \leq P_n(2)$$

On en déduit, par stricte croissance de P_n sur le segment $[1, 2]$, que

$1 < x_n \leq 2$

□

7. Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et ε un réel strictement positif.

On cherche à déterminer une valeur approchée de x_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε . On rappelle pour cela le principe de l'algorithme de dichotomie.

- On initialise deux variables a et b en leur affectant respectivement les valeurs 1 et 2.
- Tant que $b - a > \varepsilon$, on répète les opérations suivantes.

On considère le milieu c du segment $[a, b]$. Par monotonie de P_n sur $[1, 2]$, en distinguant les cas $P_n(c) < 0$ et $P_n(c) \geq 0$, on peut déterminer si x_n appartient à l'intervalle $[a, c]$ ou à l'intervalle $[c, b]$. Selon le cas, on met alors à jour la valeur de a ou de b pour se restreindre au sous-intervalle approprié.

- On renvoie finalement la valeur $\frac{a+b}{2}$, qui constitue une valeur approchée de x_n à ε près.

Recopier et compléter la fonction en langage **Python** suivante, prenant en entrée un entier n supérieur ou égal à 1 et un réel strictement positif eps , et renvoyant une valeur approchée de x_n à eps près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```

1  def approx_x(n, eps):
2      a = 1
3      b = 2
4      while _____ :
5          c = (a+b)/2
6          if P(n, c) < 0:
7              _____
8          else:
9              _____
10     return (a+b)/2

```

Démonstration. On propose la solution suivante :

```

1  def approx_x(n, eps):
2      a = 1
3      b = 2
4      while b-a > eps :
5          c = (a+b)/2
6          if P(n, c) < 0:
7              a = c
8          else:
9              b = c
10     return (a+b)/2

```

□

Partie II : Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

8. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \frac{t^{2n} - 1}{t + 1}$ est continue sur le segment

$[0, x]$. Ainsi, $\int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$ existe bien et :

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt &= \int_0^x P'_n(t) dt \\
 &= P_n(x) - P_n(0) \\
 &= P_n(x) \quad (\text{car } P_n(0) = 0 \text{ cf question 3})
 \end{aligned}$$

□

9. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On évalue l'égalité précédente en $x = x_n \in]1, 2] \subset [0, +\infty[$:

$$\int_0^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = P_n(x_n) = 0$$

et donc, par relation de Chasles :

$$\int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = 0$$

ce qui se réécrit :

$$\begin{aligned} \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt &= - \int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt \end{aligned}$$

□

10. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1, +\infty[$:

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} \forall t \in [1, +\infty[, t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1) &\iff \forall t \in [1, +\infty[, (t^2)^n - 1 \geq n(t^2 - 1) \\ &\iff \forall u \in [1, +\infty[, u^n - 1 \geq n(u - 1) \end{aligned}$$

On reconnaît alors une inégalité de convexité puisque :

- la fonction $\varphi : u \mapsto u^n - 1$ est convexe sur $[1, +\infty[$.
- sa tangente en 1 a pour équation : $y = n(x - 1)$. En effet, $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(1) = n$.

La courbe représentative de φ étant au-dessus de sa tangente en 1, on a bien :

pour tout $t \in [1, +\infty[, t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$

Commentaire

On pouvait aussi étudier les variations de la fonction $g : t \mapsto t^{2n} - 1 - n(t^2 - 1)$.

□

11. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$$

puis

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln(2)}}{\sqrt{n}}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [1, +\infty[$. On a

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$$

et $t + 1 > 0$ donc

$$\frac{t^{2n} - 1}{t + 1} \geq \frac{n(t^2 - 1)}{t + 1} = n \frac{(t - 1)(t + 1)}{t + 1} = n(t - 1)$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant ($1 \leq x_n$) :

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \int_1^{x_n} n(t - 1) dt = n \left[\frac{(t - 1)^2}{2} \right]_1^{x_n} = \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$$

Ensuite,

- $x_n - 1 > 0$ d'après la question 6.
-

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}(x_n - 1)^2 &\leq \int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt && \text{(cf question 8)} \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{t + 1} dt && \text{(par croissance de l'intégrale, les} \\ & && \text{bornes étant rangées dans l'ordre} \\ & && \text{croissant)} \\ &= [\ln(t + 1)]_0^1 \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

donc

$$(x_n - 1)^2 \leq \frac{2 \ln(2)}{n}$$

et, par croissance de $u \mapsto \sqrt{u}$ sur $[0, +\infty[$:

$$x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln(2)}}{\sqrt{n}}$$

Finalement,

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln(2)}}{\sqrt{n}}.$$

□

12. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Démonstration. On a $\frac{\sqrt{2 \ln(2)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, par théorème d'encadrement : $x_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On peut conclure que

$$\text{la suite } (x_n) \text{ est convergente et } x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

□

Exercice 4 (librement inspiré d'un oral HEC)

On admet le résultat suivant, qui sera vu en cours plus tard dans le chapitre sur les séries :

Théorème 1. (*Critère d'équivalence*)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

Alors
$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}$$

Remarque : le critère est encore valable lorsque les séries sont à termes négatifs.

Soit $\theta \in]2, +\infty[$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+\theta} u_n \end{cases}$$

1. Informatique.

a) Écrire une fonction **Python**, nommée `premTermeU`, qui :

- prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel `theta` strictement supérieur à 2,
- renvoie un tableau numpy (ou une liste, au choix) qui contient les n premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. On propose la fonction **Python** suivante :

```
1 def premTermeU(n, theta):
2     T = np.zeros(n)
3     T[0] = 1
4     for k in range(n-1):
5         T[k+1] = T[k] * (2*k + 2) / (2*k + theta)
6     return T
```

□

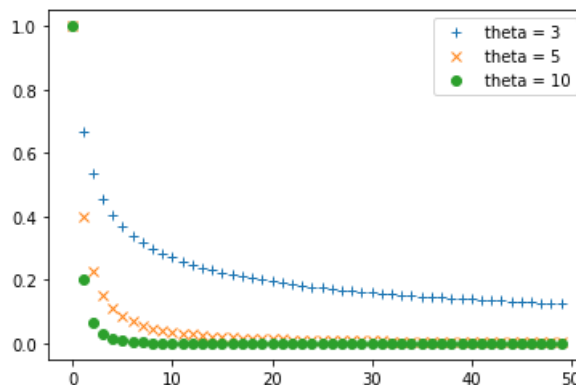
b) Écrire un script **Python**, utilisant la fonction précédente, qui permette de tracer les 50 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $\theta = 5$. On utilisera l'option graphique `'x'`.

Démonstration. On propose le script **Python** suivant :

```
1 theta = 5
2 n = 50
3 plt.plot(premTermeU(n, theta), 'x')
4 plt.show()
```

□

c) On représente ci-dessous le tracé obtenu pour plusieurs valeurs de θ :



Que peut-on conjecturer sur la suite (u_n) ?

Démonstration. On peut conjecturer que

$$(u_n) \text{ est décroissante et } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

□

2. a) Montrer : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 0$ »

Initialisation :

Par définition, $u_0 = 1 > 0$. D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+\theta} u_n > 0$$

car $2n+2 \geq 2 > 0$, $2n+\theta \geq \theta > 0$ et $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

On a démontré par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

□

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2n+2}{2n+\theta} u_n - u_n \\ &= u_n \left(\frac{2n+2}{2n+\theta} - 1 \right) \\ &= u_n \frac{2n+2 - (2n+\theta)}{2n+\theta} \\ &= u_n \frac{2-\theta}{2n+\theta} \\ &< 0 \end{aligned} \quad (\text{car } \theta > 2 \text{ et } u_n > 0)$$

□

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

Démonstration. D'après les deux questions précédentes :

- la suite (u_n) est minorée par 0

- la suite (u_n) est décroissante

D'après le théorème de convergence monotone :

la suite (u_n) est convergente et sa limite ℓ vérifie $\ell \geq 0$.

□

3. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right)$$

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc $\ln(u_n)$ existe.

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: « $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right)$ »

Initialisation :

D'une part, $\ln(u_0) = \ln(1) = 0$. D'autre part, $\sum_{k=0}^{-1} \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right) = 0$. D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} \ln(u_{n+1}) &= \ln \left(\frac{2n+2}{2n+\theta} u_n \right) \\ &= \ln(u_n) + \ln \left(\frac{2n+2}{2n+\theta} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right) + \ln \left(\frac{2n+2}{2n+\theta} \right) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right) + \ln \left(1 + \frac{2 - \theta}{2n + \theta} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right) + \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2n + \theta} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

On a démontré par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right)$. □

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\infty$, puis que $\ell = 0$.

(Indication : utiliser le critère d'équivalence)

Démonstration. • La série $\sum \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right)$ est à termes négatifs

$$\bullet \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\theta - 2}{2k + \theta} = 0 \text{ donc } \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\theta - 2}{2k + \theta} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\theta - 2}{2k}$$

• La série $\sum \frac{1}{k}$ est divergente par critère de Riemann donc la série $\sum -\frac{\theta - 2}{2k}$ est également divergente (on ne change pas la nature d'une série en multipliant le terme général par une constante non nulle)

D'après le critère d'équivalence pour les séries à termes négatifs, on en déduit que la série $\sum \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right)$ est divergente.

Il vient alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 - \frac{\theta - 2}{2k + \theta} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty, \quad i.e. \quad \ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{\ln(u_n)}$ donc

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

□

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On introduit les suites (v_n) et (w_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = n^\alpha u_n \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = (\alpha + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{\theta}{2n} \right)$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} w_n &= \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \\ &= \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n) \\ &= \ln \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^\alpha \right) + \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \\ &= \alpha \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(\frac{2n+2}{2n+\theta} \right) \\ &= \alpha \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{\theta}{2n}} \right) \\ &= \alpha \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{\theta}{2n} \right) \\ &= (\alpha + 1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{\theta}{2n} \right) \end{aligned}$$

□

b) Montrer, à l'aide d'un développement limité, que :

$$w_n = (\alpha - a) \frac{1}{n} + \frac{b - \alpha}{2} \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

où a et b sont deux réels que l'on exprimera en fonction de θ .

Démonstration. Tout d'abord, on a le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

D'où :

- $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc

$$\begin{aligned} (\alpha + 1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= (\alpha + 1) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= \frac{\alpha + 1}{n} - \frac{\alpha + 1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

- $\ln\left(1 + \frac{\theta}{2n}\right) = \frac{\theta}{2n} - \frac{\theta^2}{8n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

On en déduit que

$$\begin{aligned} w_n &= \frac{\alpha + 1}{n} - \frac{\alpha + 1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(\frac{\theta}{2n} - \frac{\theta^2}{8n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= \left(\alpha + 1 - \frac{\theta}{2} \right) \frac{1}{n} + \left(\frac{\theta^2}{8} - \frac{\alpha + 1}{2} \right) \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left(\alpha - \left(\frac{\theta}{2} - 1 \right) \right) \frac{1}{n} + \frac{\frac{\theta^2}{4} - 1 - \alpha}{2} \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= (\alpha - a) \frac{1}{n} + \frac{b - \alpha}{2} \frac{1}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

où

$$a = \frac{\theta}{2} - 1 \text{ et } b = \frac{\theta^2}{4} - 1.$$

□

c) Montrer qu'il existe une unique valeur de α (que l'on précisera et que l'on notera γ) pour laquelle la série $\sum w_n$ converge.

(Indication : utiliser le critère d'équivalence)

Démonstration. Raisonnons par disjonction de cas.

- Premier cas : $\alpha \neq a$.

Alors $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (\alpha - a) \frac{1}{n}$ et donc w_n ne change plus de signe à partir d'un certain rang.

De plus, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge par critère de Riemann, donc par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs (ou à termes négatifs), on en déduit que la série $\sum w_n$ diverge également.

- Deuxième cas : $\alpha = a$.

Alors on remarque que :

$$b = \frac{\theta^2}{4} - 1 = \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 - 1 = \left(\frac{\theta}{2} - 1 \right) \left(\frac{\theta}{2} + 1 \right) = a \left(\frac{\theta}{2} + 1 \right)$$

Or, $a \neq 0$ (car $\theta \neq 2$) et $\frac{\theta}{2} + 1 \neq 1$ (car $\theta \neq 0$) donc $b \neq a$.

Ceci permet de conclure que $b - \alpha \neq 0$ et donc

$$w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b - \alpha}{2} \frac{1}{n^2}$$

On applique ici aussi le critère d'équivalence, mais la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par critère de Riemann, donc la série $\sum w_n$ converge.

Ainsi, il existe bien une unique valeur de α pour laquelle la série $\sum w_n$ converge. Cette valeur est

$$\gamma = \alpha = \frac{\theta}{2} - 1.$$

□

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\sum_{k=1}^{n-1} w_k$ en fonction de u_n et de θ .

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} w_k &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(v_{k+1}) - \ln(v_k) \\ &= \ln(v_n) - \ln(v_1) && (\text{par télescopage}) \\ &= \ln(n^\alpha u_n) - \ln(u_1) \\ &= \ln(n^\alpha u_n) - \ln\left(\frac{2}{\theta}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\theta n^\alpha u_n}{2}\right) \end{aligned}$$

□

e) En déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^\gamma}$$

Démonstration. Nous avons vu que lorsque $\alpha = \gamma$, la série $\sum w_n$ est convergente. Notons S la somme de cette série dans ce cas là. On a alors, d'après la question précédente :

$$\ln\left(\frac{\theta n^\gamma u_n}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$$

et par continuité de l'exponentielle :

$$\frac{\theta n^\gamma u_n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^S$$

d'où, puisque $e^S \neq 0$,

$$\frac{\theta n^\gamma u_n}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^S$$

ce qui se réécrit finalement

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^\gamma}$$

où

$$C = \frac{2e^S}{\theta} > 0.$$

□