

1 Cours

Somme des termes d'une suite polynomiale

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\bullet \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \bullet \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \bullet \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Somme des termes d'une suite géométrique

Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$ et soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\bullet \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \bullet \sum_{k=m}^n q^k = q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$$

Binôme de Newton

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\bullet (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \bullet (a-b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k (-1)^{n-k} b^{n-k}$$

On doit toujours penser à la formule du binôme de Newton si on voit apparaître une somme avec des coefficients binomiaux.

Substitution dans une formule

Il n'y a qu'une règle à retenir :

Toute substitution dans une formule doit se faire à l'aide de parenthèses.

Exemple 1. Considérons la formule $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour calculer $\sum_{k=0}^{n+1} k$ il faut remplacer n par $n+1$: c'est ce remplacement que l'on appelle *substitution*.

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

devient

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Si l'on oublie les parenthèses, cela donnerait comme résultat

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{n+1(n+1+1)}{2} = \frac{n+(n+2)}{2} = \frac{2n+2}{2} = n+1$$

ce qui est bien entendu complètement faux (car les règles de distributivité entre addition et multiplication ont été bafouées à cause de l'oubli des parenthèses).

2 Exercices

2.1 Entraînement à la manipulation des symboles de somme et de produit

Exercice 1 : Réécrire les sommes ou les produits à l'aide de pointillés en faisant apparaître les deux premiers termes ainsi que les deux derniers termes.

$$1. \sum_{k=5}^{100} k$$

$$3. \sum_{k=0}^n \frac{1}{5^{3k+1}}$$

$$5. \prod_{k=0}^n 2^k$$

$$2. \sum_{k=0}^n (2k+7)$$

$$4. \prod_{k=2}^{15} k^2$$

$$6. \prod_{k=2}^n (1-k^3)$$

Exercice 2 : Réécrire les sommes ou les produits en pointillés à l'aide du symbole de somme ou de produit.

$$1. 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1)$$

$$3. 1 + 5 + \cdots + 5^{n-1} + 5^n$$

$$5. 1 \times 4 \times \cdots \times (n-1)^2 \times n^2$$

$$2. 2 + 4 + \cdots + (2n-2) + (2n)$$

$$4. 3 \times 9 \times \cdots \times 3^n \times 3^{n+1}$$

$$6. 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)$$

Exercice 3 : Calculer pour les valeurs $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

$$1. \sum_{k=0}^n (2k+1)$$

$$2. \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k}$$

$$3. \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

2.2 Linéarité de la somme

Exercice 4 : Calculer les sommes suivantes en utilisant la linéarité de la somme.

$$1. \sum_{k=0}^n (2k+1)$$

$$3. \sum_{k=0}^n (2^k + k^2)$$

$$5. \sum_{k=0}^n k(k+1)$$

$$2. \sum_{k=0}^n (k+1)^2$$

$$4. \sum_{k=0}^n (2^k + 3^k)$$

$$6. \sum_{k=0}^n (k-2)(k+2)$$

2.3 Pratique de la substitution

Exercice 5 : Développer en somme les expressions suivantes à l'aide d'une ou plusieurs substitutions.

$$1. (a-2b)^n$$

$$2. (2a+1)^n$$

$$3. (3a-1)^{2n}$$

Exercice 6 : Soient $n \in \mathbb{N}$, $q \neq 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes à l'aide d'une ou plusieurs substitutions.

$$1. \sum_{k=0}^{2n} k$$

$$6. \sum_{k=0}^{n+m} k^2$$

$$11. \sum_{k=0}^{2n+1} (-q)^k$$

$$2. \sum_{k=0}^{2n+1} k$$

$$7. \sum_{k=0}^{3n+2} k^3$$

$$12. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{2k}$$

$$3. \sum_{k=0}^{n+m} k$$

$$8. \sum_{k=0}^{n+1} q^k$$

$$13. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kx}$$

$$4. \sum_{k=0}^{2n} k^2$$

$$9. \sum_{k=0}^{2n} q^k$$

$$14. \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$$

$$5. \sum_{k=0}^{2n+1} k^2$$

$$10. \sum_{k=0}^{2n} (-q)^k$$

$$15. \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 2^k (-1)^{n+1-k} x^{n+1-k}$$

2.4 Pratique du changement d'indice

Exercice 7 : Calculer les sommes suivantes à l'aide d'un changement d'indice.

$$1. \sum_{k=0}^n (k+2)$$

$$3. \sum_{k=3}^n 5^{k-3}$$

$$5. \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}$$

$$2. \sum_{k=0}^n (k+3)^2$$

$$4. \sum_{k=3}^n \frac{1}{2^{k-2}}$$

$$6. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k-2} x^k$$

Exercice 8 :

1. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$. Démontrer la formule du capitaine :

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$. Calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

2.5 Sommes télescopiques

Exercice 9 : Calculer les sommes suivantes par télescopage.

$$1. \sum_{k=0}^n ((k+1)^2 - k^2)$$

$$3. \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$5. \sum_{k=0}^n k \times k!$$

$$2. \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$4. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$6. \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$$

Exercice 10 : Calculer les produits suivants par télescopage.

$$1. \prod_{k=0}^n \frac{2k+3}{2k+5}$$

$$2. \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$3. \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\ln(k)}\right)$$

2.6 Plus de calculs de produits

Exercice 11 : Simplifier les produits suivants à l'aide de factorielles et/ou de puissances.

$$1. \prod_{k=0}^n k$$

$$5. \prod_{k=1}^{2n} k$$

$$9. \prod_{k=0}^n 4^k$$

$$2. \prod_{k=1}^n k$$

$$6. \prod_{k=0}^n (2k)$$

$$10. \prod_{k=1}^{n+1} 2^{\ln(k)}$$

$$3. \prod_{k=2}^n k$$

$$7. \prod_{k=0}^n (2k+1)$$

$$11. \prod_{k=2}^n e^{kx}$$

$$4. \prod_{k=0}^n \ln(2)$$

$$8. \prod_{k=1}^n \sqrt{k(k+1)}$$

$$12. \prod_{k=1}^n (4k^2 - 1)$$

2.7 Sommes doubles

Exercice 12 : Calculer les sommes doubles suivantes.

$$1. \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (i+j)$$

$$3. \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^{i+j}}$$

$$2. \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n ij$$

$$4. \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{i} 2^{n-i} (3^{j+1} - 3^j)$$

Exercice 13 : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

Exercice 14 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ où $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X > k]) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X \geq k])$$

en faisant apparaître une somme double.

3 Réponses courtes

Réponses de l'exercice 1 :

1. $5 + 6 + \dots + 99 + 100$

4. $2^2 \times 3^2 \times \dots \times 14^2 \times 15^2$

2. $7 + 9 + \dots + (2n + 5) + (2n + 7)$

5. $2^0 \times 2^1 \times \dots \times 2^{n-1} \times 2^n$

3. $\frac{1}{5} + \frac{1}{5^4} + \dots + \frac{1}{5^{3n-2}} + \frac{1}{5^{3n+1}}$

6. $(1 - 2^3) \times (1 - 3^3) \times \dots \times (1 - (n-1)^3) \times (1 - n^3)$

Réponses de l'exercice 2 :

1. $\sum_{k=2}^{n-1} k$

3. $\sum_{k=0}^n 5^k$

5. $\prod_{k=1}^n k^2$

2. $\sum_{k=1}^n 2k$

4. $\prod_{k=1}^{n+1} 3^k$

6. $\prod_{k=0}^n (2k + 1)$

Réponses de l'exercice 3 :

1. $\bullet n = 0 : 1$

2. $\bullet n = 0 : 1$

3. $\bullet n = 0 : 2$

$\bullet n = 1 : 4$

$\bullet n = 1 : \frac{4}{3}$

$\bullet n = 1 : 3$

$\bullet n = 2 : 9$

$\bullet n = 2 : \frac{13}{9}$

$\bullet n = 2 : \frac{15}{4}$

Réponses de l'exercice 4 :

1. $(n + 1)^2$

3. $2^{n+1} - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

2. $\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

4. $\frac{3^{n+1}+2^{n+2}-3}{2}$

6. $\frac{(n+1)(2n^2+n-24)}{6}$

Réponses de l'exercice 5 :

1. $n(2n + 1)$

6. $\frac{(n+m)(n+m+1)(2n+2m+1)}{6}$

11. $\frac{1-q^{2n+2}}{1+q}$

2. $(n + 1)(2n + 1)$

7. $\frac{9}{4}(n + 1)^2(3n + 2)^2$

12. $(1 + x^2)^n$

3. $\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}$

8. $\frac{1-q^{n+2}}{1-q}$

13. $(1 + e^x)^n$

4. $\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$

9. $\frac{1-q^{2n+1}}{1-q}$

14. 2^{n-1}

5. $\frac{(n+1)(2n+1)(4n+3)}{3}$

10. $\frac{1+q^{2n+1}}{1+q}$

15. $(2 - x)^{n+1}$

Réponses de l'exercice 6 :

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k (-1)^{n-k} 2^{n-k} b^{n-k}$

2. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k a^k$

3. $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 3^k a^k (-1)^{2n-k}$

Réponses de l'exercice 7 :

1. $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$

3. $\frac{5^{n-2}-1}{4}$

5. $2^n - 1$

2. $\frac{(n+1)(2n^2+19n+54)}{6}$

4. $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

6. $x^2 \left((1+x)^n - nx^{n-1} - x^n \right)$

Réponses de l'exercice 8 :

1. Utiliser la formule avec les factorielles.

2. $n2^{n-1}$

3. np

Réponses de l'exercice 9 :

1. $(n+1)^2$

3. $\ln(n+1)$

5. $(n+1)! - 1$

2. $\frac{1}{n+1} - 1$

4. $1 - \frac{1}{n+1}$

6. $1 - \frac{1}{(n+1)!}$

Réponses de l'exercice 10 :

1. $\frac{3}{2n+5}$

2. $n+1$

3. $\frac{\ln(n+1)}{\ln(2)}$

Réponses de l'exercice 11 :

1. 0

5. $(2n)!$

9. $4^{\frac{n(n+1)}{2}}$

2. $n!$

6. $2^n n!$

10. $2^{\ln((n+1)!)}$

3. $n!$

7. $\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

11. $e^{x \frac{(n-1)(n+2)}{2}}$

4. $(\ln(2))^{n+1}$

8. $n! \sqrt{n+1}$

12. $\frac{1}{n+1} \left(\frac{(2n+1)!}{2^n n!} \right)^2$

Réponses de l'exercice 12 :

1. $n(n+1)^2$

3. $\left(2 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)^2$

2. $\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

4. $5^n - 3^n$

4 Corrigés détaillés

Correction détaillée de l'exercice 1 :

Correction détaillée de l'exercice 2 :

Correction détaillée de l'exercice 3 :

Correction détaillée de l'exercice 4 :

Correction détaillée de l'exercice 5 :

Correction détaillée de l'exercice 6 :

Correction détaillée de l'exercice 7 :

Correction détaillée de l'exercice 8 :

Correction détaillée de l'exercice 9 :

Correction détaillée de l'exercice 10 :

Correction détaillée de l'exercice 11 :

Correction détaillée de l'exercice 12 :

1. On sépare la somme en deux sommes :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (i+j) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n i + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n j$$

On remarque que la deuxième double somme est égale à la première. En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n j &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n j && (\text{par permutation des deux sommes}) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n i && (\text{les indices étant muets, on peut les échanger}) \end{aligned}$$

Dans la première somme, i ne dépend pas de j , et dans la seconde, j ne dépend pas de i . Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (i+j) &= 2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n i \\ &= 2 \sum_{i=0}^n i \sum_{j=0}^n 1 && (i \text{ ne dépend pas de } j) \\ &= 2 \sum_{i=0}^n i(n+1) \\ &= 2(n+1) \sum_{i=0}^n i \\ &= 2(n+1) \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1)^2 \end{aligned}$$

2. On remarque que, pour i fixé, i est constant par rapport à j :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n ij &= \sum_{i=0}^n i \sum_{j=0}^n j \\ &= \left(\sum_{i=0}^n i \right) \left(\sum_{j=0}^n j \right) \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

3. Comme pour la question précédente, on a une double somme de la forme $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_i x_j$ que l'on va pouvoir écrire comme le carré d'une somme simple. En effet :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^{i+j}} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^i} \frac{1}{2^j} \\ &= \left(\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} \right) \left(\sum_{j=0}^n \frac{1}{2^j} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \right)^2\end{aligned}$$

Il s'agit d'une somme géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^{i+j}} = \left(2 - \frac{1}{2^n} \right)^2$$

4. Tout d'abord, pour i fixé, les termes $\binom{n}{i} 2^{n-i}$ ne dépendent pas de j , ainsi :

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{i} 2^{n-i} (3^{j+1} - 3^j) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 2^{n-i} \sum_{j=0}^{i-1} (3^{j+1} - 3^j)$$

Par télescopage :

$$\sum_{j=0}^{i-1} (3^{j+1} - 3^j) = 3^i - 1$$

D'où :

$$\begin{aligned}S &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 2^{n-i} (3^i - 1) \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 2^{n-i} 3^i - \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 2^{n-i}\end{aligned}$$

Pour la première somme, on utilise la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^{n-i} 3^i = (2+3)^n = 5^n$$

Comme le terme correspondant à $i = 0$ vaut 2^n , on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 2^{n-i} 3^i = 5^n - 2^n$$

De même :

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^{n-i} 1^i = (2+1)^n = 3^n$$

et donc :

$$\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 2^{n-i} = 3^n - 2^n$$

Finalement :

$$S = (5^n - 2^n) - (3^n - 2^n) = 5^n - 3^n$$

Correction détaillée de l'exercice 13 :

On commence par écrire le carré comme un produit :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)$$

En développant le produit, on obtient une somme double :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j$$

On sépare cette somme en distinguant les termes pour lesquels $i = j$, ceux pour lesquels $i < j$ et ceux pour lesquels $i > j$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i=j}} x_i x_j + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i < j}} x_i x_j + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i > j}} x_i x_j$$

Lorsque $i = j$, on a $x_i x_j = x_i^2$, donc :

$$\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i=j}} x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Dans la troisième somme, on échange les rôles de i et j :

$$\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i > j}} x_i x_j = \sum_{\substack{1 \leq j, i \leq n \\ j < i}} x_j x_i = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i < j}} x_i x_j$$

Les deux sommes hors diagonale sont donc égales. Ainsi :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

Correction détaillée de l'exercice 14 :

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$.

Par définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k)$$

Le terme correspondant à $k = 0$ étant nul, on a aussi :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k)$$

Pour faire apparaître une somme double, on écrit

$$k = \sum_{j=0}^{k-1} 1$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{k-1} 1 \right) \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = k) \end{aligned}$$

On échange maintenant l'ordre des deux sommations. Les couples (j, k) vérifient

$$1 \leq k \leq n \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq k-1,$$

ce qui est équivalent à

$$0 \leq j \leq n-1 \quad \text{et} \quad j+1 \leq k \leq n.$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \mathbb{P}(X = k)$$

Or l'événement $[X > j]$ est la réunion disjointe des événements $[X = k]$ pour $k = j+1, \dots, n$. Donc, par incompatibilité :

$$\sum_{k=j+1}^n \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > j)$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > j)$$

En renommant l'indice j en k :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)$$

Enfin, puisque X est à valeurs entières,

$$[X > k] = [X \geq k+1]$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X \geq k+1) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k)$$