

Colles de Mathématiques en E2A

Espaces vectoriels, séries

Semaine 5 : 28 septembre - 2 octobre

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre III : espaces vectoriels

Les espaces vectoriels de dimension infinie sont hors-programme.

On travaillera dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou encore $\mathbb{R}_n[X]$ avec un n petit (typiquement $2 \leq n \leq 3$).

1.1 Définitions

- Espace vectoriel, vecteurs, scalaires, combinaison linéaire.
- Sous-espace vectoriel, espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs (Notation $\text{Vect}(\dots)$).
- Famille génératrice d'un espace vectoriel. Relation de dépendance linéaire non triviale entre des vecteurs, famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires. Base d'un espace vectoriel, coordonnées d'un vecteur dans une base. Bases canoniques des espaces vectoriels usuels.
- Cardinal d'une famille finie.
- Espace vectoriel de dimension finie, dimension d'un espace vectoriel.
- Rang d'une famille de vecteurs.
- Rang d'une matrice.

1.2 Résultats

- Règles de calcul dans les espaces vectoriels usuels.
- Caractérisation des sous-espaces vectoriels par stabilité par combinaison linéaire.
- L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs est... un espace vectoriel.
- Propriétés de l'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs (qui permettent de simplifier la famille génératrice). Ces propriétés se transmettent au rang d'une famille de vecteurs et au rang d'une matrice.
- Intérêt des familles libres, des familles génératrices, des bases. Existence et unicité d'une décomposition d'un vecteur sous forme de combinaison linéaire des vecteurs d'une base.
- Inégalités sur le cardinal d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base (de E).
- Inégalités sur le rang d'une famille de vecteurs ou d'une matrice.

1.3 Méthodes

- Montrer qu'une partie B d'un espace vectoriel E n'est pas un sous-espace vectoriel de E :
 - en montrant que B ne contient pas le vecteur nul
 - en exhibant u et v deux vecteurs de B tels que $u + v$ n'est pas un vecteur de B
 - en exhibant u un vecteur de B et λ un scalaire tels que λu n'est pas un vecteur de B
- Montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E en exhibant une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ telle que

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$$

- Si la méthode précédente ne semble pas praticable, on revient à la caractérisation des sous-espaces vectoriels (via la stabilité par combinaison linéaire).
- Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on montre que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E usuel.
- Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est libre, on se ramène à résoudre un système linéaire d'équations à l'aide du pivot de Gauss, et on montre que la seule solution est la solution nulle. Si les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont des vecteurs lignes ou colonnes, on pourra simplement calculer le rang de la matrice constituée de ces vecteurs et montrer qu'il est égal au cardinal de $\mathcal{F}$.
- Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E , on montre que

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$$

- Pour trouver les coordonnées d'un vecteur u dans une base $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de E , on résout l'équation

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_p e_p$$

d'inconnues $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Cette équation est équivalente à un système linéaire non homogène, on appliquera donc le pivot de Gauss.

- Pour trouver la dimension de E , on trouve une base de E et on compte le nombre de vecteurs constituant cette base.
- Pour montrer qu'une famille finie $\mathcal{F}$ est une base d'un espace vectoriel usuel E de dimension finie, on peut (au choix, selon ce qui semble être le plus rapide) :

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre et $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$.
2. Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E et $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$.

On préférera néanmoins la première méthode en général.

- Soient E et F deux espaces vectoriels avec E de dimension finie. Pour montrer que $F = E$, on montre que $F \subset E$ et $\dim(F) = \dim(E)$.
- Pour calculer le rang d'une famille de vecteurs, on peut au choix :
 - Calculer l'espace vectoriel engendré par la famille en utilisant les règles de simplification sur la famille, jusqu'à ce que la famille obtenue soit libre. Attention, les égalités portent sur l'espace vectoriel engendré par les familles, pas sur les familles elles-mêmes
 - Passer par un calcul de rang d'une matrice en mettant tous les vecteurs de la famille en colonnes dans une matrice
- Pour calculer le rang d'une matrice A , on applique le pivot de Gauss sur A pour l'échelonner. Une fois la matrice A échelonnée, on enlève les lignes nulles et on compte le nombre de lignes (non nulles) qu'il reste. Attention, les égalités portent sur le rang des matrices, pas sur les matrices elles-mêmes.

2 Chapitre IV : séries

2.1 Définitions

- Série de terme général u_n , suite des sommes partielles associée à la série $\sum u_n$, somme partielle d'ordre n , série convergente/divergente, somme d'une série, nature d'une série.
- Série grossièrement divergente.
- Série géométrique de raison q . Série géométrique dérivée, d'ordre 1 ou 2, de raison q .
- Série exponentielle.
- Sommes télescopiques.
- Séries de Riemann.
- Série à termes positifs.
- Série absolument convergente.

2.2 Résultats

- Critère nécessaire de convergence (u_n tend vers 0).
- Simplification des sommes télescopiques.
- Formules pour les sommes infinies usuelles.
- Critère de Riemann.
- Croissance de la suite des sommes partielles associée à une série à termes positifs.
- Critère de comparaison, critère équivalence et critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs.
- Inégalité triangulaire pour les séries absolument convergentes.

2.3 Méthodes

- Reconnaître une série usuelle lors d'un calcul de somme d'une série, ou la faire apparaître « de force » lorsque la série qu'on étudie ressemble à une série usuelle (ex : $\sum \frac{n^2}{3^n}$).
- Reconnaître une somme télescopique (éventuellement cachée) et savoir calculer la somme.
- Trouver la nature d'une série à termes positifs en étudiant le terme général de la série (trouver un équivalent, ou une négligeabilité, ou une inégalité). Si le terme général n'est pas équivalent à un terme général de série usuelle, essayer de deviner la nature de la série (en ayant en tête les croissances comparées) et proposer une relation de négligeabilité qui permet de le démontrer.
- Utiliser la monotonie d'une fonction pour faire une comparaison série / intégrale.

3 Questions de cours

1. On considère les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (-1, 1, -1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On rappelle que $E_0(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.
Montrer que $E_0(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ puis en donner une base et sa dimension.
3. Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$. Calculer $\text{rg}(C)$.
4. Montrer que $\sum \frac{n+7}{2^n n!}$ converge et calculer sa somme.
5. Montrer que $\sum \frac{n^2}{2^n}$ converge et calculer sa somme.
6. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

7. Compléter la fonction **Python** suivante, qui prend en paramètres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel x , pour qu'elle renvoie le réel $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k}$.

```
1 def P(n, x):  
2     S = 0  
3     for k in _____ :  
4         S = _____  
5     return S
```