

Interrogation de rentrée (correction)

Pour réussir en Mathématiques, il faut...

I. Comprendre que c'est un langage et apprendre à le parler

Exercice 1. Entourer la ou les bonne(s) réponse(s). Aucune justification n'est attendue.

1. Dans la phrase « On note f la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. » :

a) La variable x est

A. libre

B. ☒ liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

b) La variable f est

A. ☒ libre

B. liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

c) Un-e élève peut attentionné-e a ensuite rédigé la chose suivante :

« La fonction $f(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. »

Réécrire cette phrase pour qu'elle soit correcte.

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

2. Une variable muette est

A. libre

B. ☒ liée

C. parfois libre,
parfois liée

D. la réponse D

3. L'expression $\int_0^y \ln(1 + 2t^2)dt$ dépend de

A. ☒ y

B. t

C. y et t

D. ni y , ni t

4. Dans l'écriture : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n \leq K$,

a) La variable n_0 est

A. libre

B. ☒ liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

b) La variable n est

A. libre

B. ☒ liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

c) La variable K est

A. ☒ libre

B. liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

5. Dans l'écriture $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = ay - z\}$,

a) La variable x est

A. libre

B. liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

b) La variable y est

A. libre

B. liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

c) La variable z est

A. libre

B. liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

d) La variable a est

A. libre

B. liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

6. L'expression $\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^i (i+j)^2$ dépend de

A. n

B. i

C. j

D. ni n , ni i , ni j

7. Dans la phrase « La famille $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. »,

a) La variable X est

A. libre

B. liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

b) La variable k est

A. libre

B. liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

8. Soit (u_n) une suite admettant une limite (finie ou non). La quantité $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

A. dépend toujours de n

B. ne dépend jamais de n

C. peut dépendre de n

9. Dans l'écriture : $f(x) = 1 + x + o_{x \rightarrow 0}(x)$,

a) La variable x est

A. libre

B. liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

b) La variable f est

A. libre

B. liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

10. Une variable liée

A. doit toujours

B. ne doit jamais

C. peut parfois

être introduite par un « Soit ».

Exercice 2

Pour chacune des expressions suivantes : déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

Expression	Objet / Proposition	Type d'objet
$\int_0^1 (x + y) dx$	Objet	Réel
$f : t \mapsto e^{-t}$	Objet	Fonction
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$	Objet	Ensemble
$\exists k \in \mathbb{Z}, k \leq \pi < k + 1$	Proposition	
$\sum_{n \geq 3} u_n$	Objet	Suite (série)
u_n	Objet	Réel
$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Objet	Suite
$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \ln(2)$	Proposition	

II. Savoir calculer et présenter ses résultats sous forme simplifiée

Exercice 3

1. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} -2x + 2y - 3z = 0 \\ -4x + 2y + z = 0 \\ 4x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2x + 2y - 3z = 0 \\ -4x + 2y + z = 0 \\ 4x + 4y - 3z = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} -2x + 2y - 3z = 0 \\ -2y + 7z = 0 \\ 8y - 9z = 0 \end{cases} && \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 + 2L_1 \end{aligned} \\ &\iff \begin{cases} -2x + 2y - 3z = 0 \\ -2y + 7z = 0 \\ 19z = 0 \end{cases} && L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} && \text{(par remontées successives)} \end{aligned}$$

□

2. a) Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -3x - 3y + 2z = 0 \\ 4x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -3x - 3y + 2z = 0 \\ 4x + 4y - 2z = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 11z = 0 \\ -14z = 0 \end{cases} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 4L_1 \end{aligned} \\ &\iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.

Démonstration. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} X \in E_2(A) &\iff AX = 2X \\ &\iff (A - 2I)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -3x - 3y + 2z = 0 \\ 4x + 4y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} & (d'après la question 2.a) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E_2(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y, z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y, z = 0 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

□

Exercice 4

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{2n+1} k^2$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n+1} k^2 &= \frac{(2n+1)(2n+2)(2(2n+1)+1)}{6} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)(4n+3)}{3} \end{aligned}$$

□

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{4})$. Calculer $\mathbb{E}(2X)$ et $\mathbb{V}(2X)$.

Démonstration. X est finie donc $2X$ est finie. A ce titre, $2X$ admet une espérance et une variance.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(2X) &= 2\mathbb{E}(X) && (\text{par linéarité}) \\ &= 2n \frac{1}{4} \\ &= \frac{n}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(2X) &= 4\mathbb{V}(X) && (\text{par propriété de la variance}) \\ &= 4n \frac{1}{4} \frac{3}{4} \\ &= \frac{3n}{4} \end{aligned}$$

□

III. Comprendre que le langage mathématique est soumis à des règles logiques et apprendre à raisonner en accord avec elles

Exercice 6

Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit la loi géométrique de paramètre p .
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

Démonstration.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

- On remarque tout d'abord :

$$[X > k] = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X > k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]\right) \\
 &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i]) && (\text{par incompatibilité de } [X = k+1], [X = k+2], \dots) \\
 &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} p q^{i-1} \\
 &= p \sum_{i=k+1}^{+\infty} q^{i-1} \\
 &= p \sum_{i=0}^{+\infty} q^{k+i} \\
 &= p q^k \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \\
 &= p q^k \frac{1}{1-q} && (\text{on reconnaît une série géométrique de raison } q \in]-1, 1[) \\
 &= q^k && (\text{car } 1-q=p)
 \end{aligned}$$

□

2. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

Démonstration.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 [X > k-1] &= [X \geq k] && (\text{car } X \text{ est à valeurs entières}) \\
 &= [X = k] \cup [X > k]
 \end{aligned}$$

Les événements $[X = k]$ et $[X > k]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X > k-1]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X > k])$$

Ainsi : $\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$.

□

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X = k]) &= \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]) && (\text{d'après la question précédente}) \\
 &= q^{k-1} - q^k && (\text{par hypothèse de la question 1.b}) \\
 &= q^{k-1}(1-q) = q^{k-1}p
 \end{aligned}$$

On en déduit que la v.a.r. X suit la loi $\mathcal{G}(p)$.

□

3. Conclure.

Démonstration.

- D'après la question **1.a**) : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.
- D'après la question **1.b**) : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X > k]) = q^k \Rightarrow X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
- Ainsi, si X est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X > k]) = q^k$$

On obtient ainsi une nouvelle caractérisation de la loi géométrique, à savoir :

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \Leftrightarrow (X(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X > k]) = (1-p)^k)$$

□

IV. Comprendre que les questions Python sont (le plus souvent) simples, répétitives et qu'elles rapportent beaucoup de points

Exercice 7

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$. Écrire une fonction **Python**, nommée **f**, qui prend en argument un réel x et qui renvoie $f(x)$.

Démonstration.

```
1 def f(x):
2     return np.log(1 + x**2)
```

□

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Écrire une fonction **Python**, nommée **suiteU**, qui prend en argument un entier n et qui renvoie u_n .

Démonstration.

```
1 def suiteU(n):
2     u = 1
3     for k in range(n):
4         u = f(u)
5     return u
```

□

3. On **admet** que la suite (u_n) converge vers 0. Écrire une fonction **Python**, nommée **premTerme**, qui prend en argument un réel $\varepsilon > 0$ (que l'on notera **eps** en **Python**) et qui renvoie le premier entier n vérifiant : $u_n \leq \varepsilon$.

Démonstration.

```

1  def premTerme(eps):
2      n = 0
3      u = 1
4      while u > eps:
5          n += 1
6          u = f(u)
7      return n

```

□

V. Comprendre qu'un sujet de concours est tenu par une logique interne explicitée par la numérotation des questions et réussir à faire le lien entre les questions en prenant du recul

Exercice 8

Soit

$$f : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x \ln(1+x) \end{cases}$$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, +\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ et calculer, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

Démonstration. La fonction f est de la forme $f = f_1 \times f_2$ où

- $f_1 : x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ car polynomiale
- $f_2 : x \mapsto \ln(1+x)$ est de la forme $f_2 = \ln \circ h$ où
 - × $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$
 - × $h : x \mapsto 1+x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ et $h([0, +\infty[) = [1, +\infty[\subset]0, +\infty[$

Ainsi,

f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$.

Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

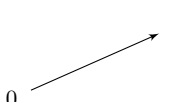
et

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x+2}{(1+x)^2}$$

□

b) Étudier les variations de f' , puis celles de f .

Démonstration. Pour tout $x \geq 0$: $f''(x) > 0$. On en déduit que f' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. D'où le tableau de variations de f' (la limite en $+\infty$ s'obtenant sans difficulté) :

x	0	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	+	
Variations de f'		

Ainsi, pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
D'où le tableau de variations de f (la limite en $+\infty$ s'obtenant sans difficulté) :

x	0 $+\infty$
Signe de $f'(x)$	+
Variations de f	

□

c) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0, +\infty[$.

Démonstration. Soit $x \in [0, +\infty[$.

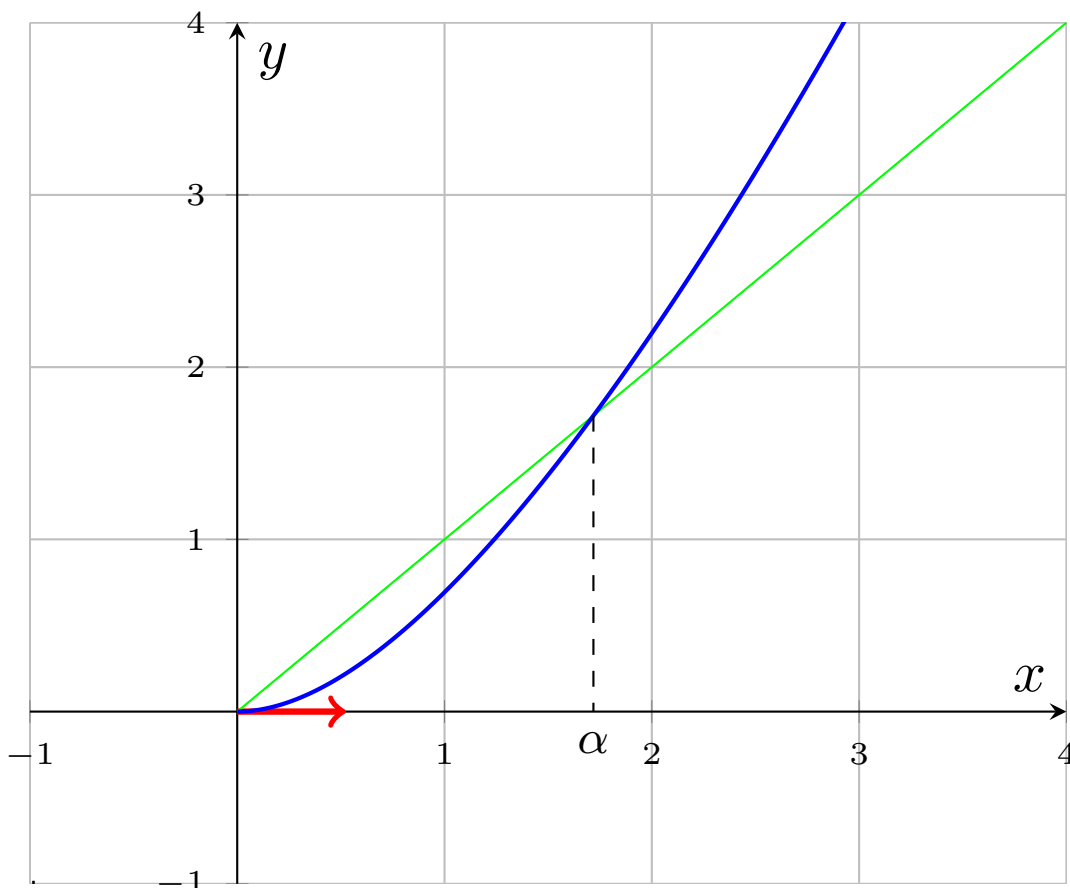
$$\begin{aligned}
 f(x) = x &\iff x \ln(1+x) = x \\
 &\iff x \ln(1+x) - x = 0 \\
 &\iff x (\ln(1+x) - 1) = 0 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{OU} \quad \ln(1+x) - 1 = 0 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{OU} \quad \ln(1+x) = 1 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{OU} \quad 1+x = e \\
 &\iff x = 0 \quad \text{OU} \quad x = e - 1
 \end{aligned}$$

□

d) Tracer, dans un même repère orthonormé, la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.

Démonstration.

On pose $\alpha = e - 1$.



□

2. On suppose dans cette question : $u_0 > e - 1$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e - 1 < u_n \leq u_{n+1}$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: « $e - 1 < u_n \leq u_{n+1}$ »

Initialisation :

Par hypothèse : $u_0 > e - 1$. Or, $u_1 = u_0 \ln(1 + u_0)$ et $\ln(1 + u_0) \geq \ln(e) = 1$ par croissance de $\ln$ sur $]0, +\infty[$. En multipliant par $u_0 > 0$, on obtient $u_1 \geq u_0$. D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n + 1)$.

Par hypothèse de récurrence : $e - 1 < u_n \leq u_{n+1}$. Or, f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Donc $f(e - 1) < f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, i.e. $e - 1 < u_{n+1} \leq u_{n+2}$. D'où $\mathcal{P}(n + 1)$.

On a ainsi montré par récurrence que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e - 1 < u_n \leq u_{n+1}$.

□

b) En déduire que : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Démonstration. D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante. Il n'y a alors que deux possibilités : soit (u_n) converge, soit $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Supposons que (u_n) converge et notons

$\ell \in [u_0, +\infty[$ sa limite.

Remarquons que :

- $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ par argument de suite extraite
- $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(\ell)$ par continuité de f sur $[e-1, +\infty[$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc, par unicité de la limite : $\ell = f(\ell)$.

D'après la question 1.c), $\ell = 0$ ou $\ell = e-1$. C'est absurde puisque $\ell \geq u_0 > e-1 > 0$.

Donc

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

□

3. On suppose dans cette question : $0 < u_0 < e-1$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} \leq u_n < e-1$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: « $0 < u_{n+1} \leq u_n < e-1$ »

Initialisation :

Par hypothèse : $u_0 > 0$. Par stricte croissance de f sur $[0, +\infty[$, $u_1 = f(u_0) > f(0) = 0$.

De plus, $u_1 = u_0 \ln(1+u_0)$ et $\ln(1+u_0) \leq \ln(e) = 1$ par croissance de $\ln$ sur $]0, +\infty[$. En multipliant par $u_0 > 0$, on obtient $u_1 \leq u_0$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence : $0 < u_{n+1} \leq u_n < e-1$. Or, f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Donc $f(0) < f(u_{n+1}) \leq f(u_n) < f(e-1)$, i.e. $0 < u_{n+2} \leq u_{n+1} < e-1$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

On a ainsi montré par récurrence que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} \leq u_n < e-1.$$

□

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ puis que $u_{n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2$.

Démonstration. D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0, u_0]$.

Remarquons que :

- $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ par argument de suite extraite
- $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(\ell)$ par continuité de f sur $[0, u_0]$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc, par unicité de la limite : $\ell = f(\ell)$.

D'après la question 1.c), $\ell = 0$ ou $\ell = e-1$. Puisque $\ell \leq u_0 < e-1$, on a nécessairement $\ell = 0$.

Donc

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Ensuite, on sait que $\ln(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} x$.

Puisque $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, on peut alors écrire que $\ln(1+u_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Finalement,

$$u_{n+1} = u_n \ln(1+u_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2$$

□

(On souhaite dans la suite de cette question préciser la vitesse de convergence vers 0)

c) On pose $K = \ln(1 + u_0)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq Ku_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est décroissante donc $u_n \leq u_0$.

Par croissance de $\ln$ sur $]0, +\infty[$, on obtient $\ln(1 + u_n) \leq \ln(1 + u_0) = K$.

On multiplie par $u_n > 0$:

$$u_{n+1} = u_n \ln(1 + u_n) \leq Ku_n.$$

□

d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq K^n u_0$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq K^n u_0$ »

Initialisation :

On a bien $u_0 \leq K^0 u_0$ car $K^0 = 1$. D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq Ku_n && (d'après la question précédente) \\ &\leq K K^n u_0 && (par hypothèse de récurrence) \\ &\leq K^{n+1} u_0 \end{aligned}$$

On a ainsi montré par récurrence que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leq K^n u_0.$$

□

e) Vérifier que $0 < K < 1$ puis retrouver la limite de la suite (u_n) .

Démonstration. On sait que $0 < u_0 < e - 1$ donc $1 < 1 + u_0 < e$ d'où $0 < K < 1$ par croissance stricte de $\ln$ sur $]0, +\infty[$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq K^n u_0$ et $K^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par théorème d'encadrement :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

□

4. Que se passe-t-il lorsque $u_0 = e - 1$?

Démonstration. Dans ce cas, la suite (u_n) est constante (car $e - 1$ est un point fixe de f). Plus précisément :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = e - 1.$$

□

5. (*) *Informatique.* Expliquer ce que réalise le script **Python** suivant :

```
1  def f(x):  
2      return x * np.log(1+x)  
3  
4  x = np.arange(0.01, 3, 0.1)  
5  plt.plot(x, f(x))  
6  
7  x = [0, 3]  
8  plt.plot(x, x)  
9  
10 u = np.e - 1.1  
11 x = [u]  
12 y = [0]  
13 for k in range(1, 11):  
14     z = f(u)  
15     x.append(u)  
16     x.append(z)  
17     y.append(z)  
18     y.append(z)  
19     u = z  
20 plt.plot(x, y)  
21 plt.grid()  
22 plt.show()
```

Démonstration. Ce script trace sur un même graphique :

- le graphe de f au dessus du segment $[0, 3]$
- la droite d'équation $y = x$

Il procède ensuite à la construction des 10 premiers termes de la suite (u_n) lorsque $u_0 = e - 1, 1$. La technique consiste à reporter les ordonnées sur l'axe des abscisse via la droite d'équation $y = x$.

On reproduit ici le graphique obtenu par **Python** :

On voit bien que la suite (u_n) décroît et converge vers 0. □