
DS2 (vA)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidat·es sont invité·es à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Exercice 1

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On note $E = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ puis donner la dimension de E .
2. *a)* Montrer que l'ensemble $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ est un espace vectoriel. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F puis donner la dimension de F .
b) Montrer que l'ensemble $G = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$ est un espace vectoriel. Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de G puis donner la dimension de G .
3. *a)* Montrer que $F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
b) Montrer que la famille $\mathcal{B}$ obtenue en réunissant les vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$ de F et de la base $\mathcal{B}_2$ de G forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
c) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis celles du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dans la base $\mathcal{B}$.
4. On considère la matrice P définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1} .
b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
a) Prouver que la matrice $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale.
b) Montrer que $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ est inversible.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a, b)$ soit inversible.
c) Prouver que $(M(a, b))^2 = I$ si et seulement si $(D(a, b))^2 = I$.
En déduire l'existence de quatre matrices $M(a, b)$ que l'on déterminera, vérifiant :

$$(M(a, b))^2 = I$$

Exercice 2

On considère un nombre réel a strictement supérieur à 1, ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = a$ et par la relation de récurrence, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$$

1. Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle retourne la valeur de u_n pour des valeurs données de n et de a :

```

1  def suite_u(a,n):
2      u=-----
3      for k in range(1,n+1):
4          u=-----
5      return u

```

2. Montrer que si l'on suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est $\ell = 1$.
3. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq a$.
 c) Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
4. À l'aide de la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de la question précédente, préciser laquelle des quatre propositions suivantes est vraie et justifier l'équivalent choisi :

❶ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n$. ❷ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n^2$. ❸ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n^2}$. ❹ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n}$.

5. a) Justifier que, pour tout entier naturel n , $\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$ existe et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n}$$

- b) En déduire, pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}$ en fonction de a et u_{n+1} .
 c) Conclure que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge et donner sa somme en fonction de a .

Dans toute la suite, on suppose que $a = 2$.

6. a) Montrer que l'on définit bien la loi d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{u_n}$$

- b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $2^n(2^n - 1) + 1 \geq 2^{n+1}$.
 c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a l'inégalité $u_n \geq 2^n$ puis vérifier que cette dernière inégalité reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
 d) Établir que X possède une espérance et une variance que l'on ne cherchera pas à calculer.

Exercice 3

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.

On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs. Si on n'obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1 .

Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face, ... alors X prend la valeur 5.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au $n^{\text{ème}}$ lancer ».
- P_n : « Obtenir Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

La suite $(P_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs ».
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n = \mathbb{P}(U_n) \quad \text{et} \quad a_n = \mathbb{P}([X = n])$$

Partie A

1. Exprimer les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k .
En déduire les valeurs de a_2 , a_3 et a_4 .

2. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \sum_{k=2}^n a_k$.

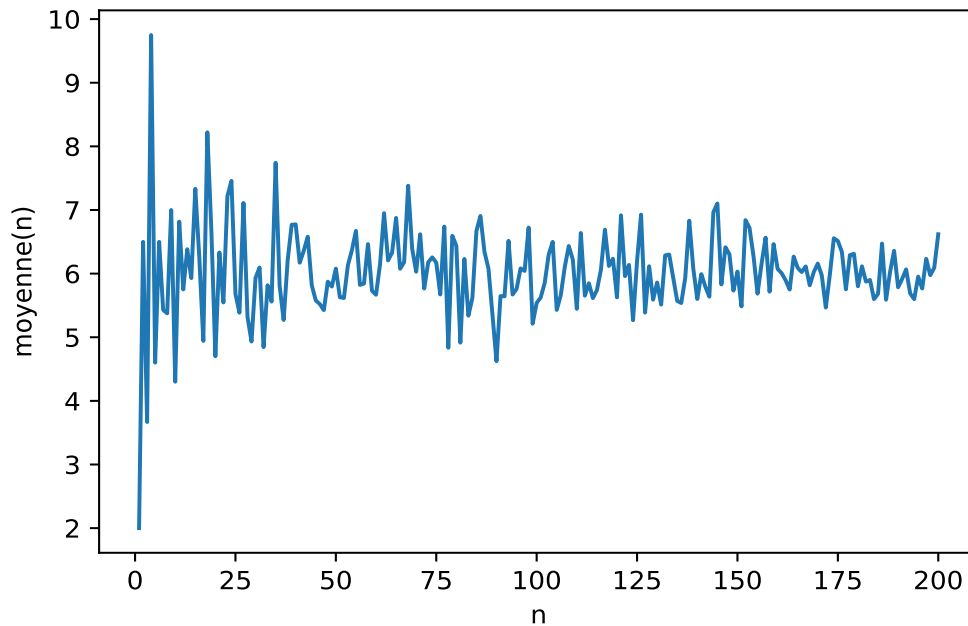
3. a) Recopier et compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```

1  def simulX():
2      tirs = 0
3      pile = 0
4      while pile ____:
5          if rd.random() < 1/2:
6              pile = pile + 1
7          else:
8              pile = ____
9              tirs = ____
10     return tirs

```

- b) Écrire une fonction **Python** nommée `moyenne(n)` qui simule n fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.
- c) (CUBES UNIQUEMENT) On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier n de $\llbracket 1, 200 \rrbracket$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

Partie B

4. a) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$$

b) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$$

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.

On **admet** que :

$$\mathbb{P}([X = -1]) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Partie C

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geq 2$:

$$v_n = 1 - u_n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=2}^n k \mathbb{P}([X = k])$$

6. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8} v_{n-2}$$

7. Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}([X = n + 1]) = v_n - v_{n+1}$$

8. Démontrer alors par récurrence, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$$

9. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée.

10. Montrer que X admet une espérance.

11. a) Démontrer que la suite $(nv_n)_{n \geq 2}$ converge vers un réel λ .

b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.
À l'aide de l'égalité démontrée à la question 6., obtenir une contradiction.

c) Donner alors la valeur de l'espérance de X .