

DS2 (vA) - Barème

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `numpy.random` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

Exercice 1 (ECRICOME 2008)

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On note $E = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ puis donner la dimension de E .

- 2 pts : $E = \text{Vect}(I, A)$
- 1 pt : (I, A) est libre
- 1 pt : $\dim(E) = 2$

2. a) Montrer que l'ensemble $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ est un espace vectoriel. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F puis donner la dimension de F .

- 1 pt : écriture système
$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

- 1 pt : résolution $\begin{cases} x = y + 2z \end{cases}$

- 1 pt : écriture sous forme de sev engendré : $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- 1 pt : La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre

- 1 pt : $\dim(F) = 2$

b) Montrer que l'ensemble $G = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$ est un espace vectoriel. Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de G puis donner la dimension de G .

- 1 pt : écriture système
$$\begin{cases} -y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

- 1 pt : résolution $\begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}$

- 1 pt : écriture sous forme de sev engendré : $G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- 1 pt : La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre

- 1 pt : $\dim(G) = 1$

3. a) Montrer que $F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

- 1 pt : $\supset$

- 2 pts : $\subset$

b) Montrer que la famille $\mathcal{B}$ obtenue en réunissant les vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$ de F et de la base $\mathcal{B}_2$ de G forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- 2 pts : $\mathcal{B}$ libre

- 1 pt : $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$

c) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis celles du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dans la base $\mathcal{B}$.

- 1 pt : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}$.

- 2 pts : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(5, -1, 2)$ dans $\mathcal{B}$.

4. On considère la matrice P définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1} .

- 3 pts : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

- 1 pt : $AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Prouver que la matrice $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale.

- 1 pt : $M(a, b) = a \cdot I + b \cdot A$

- 1 pt : $D(a, b) = a \cdot I + b \cdot D$

b) Montrer que $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ est inversible.

En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a, b)$ soit inversible.

- **2 pts** : $M(a, b)$ inversible $\Leftrightarrow D(a, b)$ inversible (1 pt par implication)

- **1 pt** : $M(a, b)$ inversible ssi $\begin{cases} a + 2b \neq 0 \\ a + b \neq 0 \end{cases}$

c) Prouver que $(M(a, b))^2 = I$ si et seulement si $(D(a, b))^2 = I$.

En déduire l'existence de quatre matrices $M(a, b)$ que l'on déterminera, vérifiant :

$$(M(a, b))^2 = I$$

- **2 pts** : $(M(a, b))^2 = I \Leftrightarrow (D(a, b))^2 = I$

- **1 pt** : obtention 4 systèmes

- **2 pts** : résolutions (1/2 pt par système) : $M(1, 0)$, $M(-3, 2)$, $M(3, -2)$ et $M(-1, 0)$

Exercice 2 (EDHEC 2026)

On considère un nombre réel a strictement supérieur à 1, ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = a$ et par la relation de récurrence, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$$

1. Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle retourne la valeur de u_n pour des valeurs données de n et de a :

```

1 def suite_u(a,n):
2     u=-----
3     for k in range(1,n+1):
4         u=-----
5     return u

```

- 1 pt : $u = a$
- 1 pt : $u = u**2 - u + 1$

2. Montrer que si l'on suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est $\ell = 1$.

- 1 pt : argument de continuité
- 1 pt : $\ell = \ell^2 - \ell + 1$ en citant le passage à la limite
- 1 pt : résolution de $x^2 - 2x + 1 = 0$ par factorisation ou étude du discriminant

3. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- 1 pt : $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geq 0$

- b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq a$.

- 1 pt : initialisation
- 1 pt : hérédité

- c) Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- 1 pt : hypothèse (u_n) majorée
- 1 pt : thm de convergence monotone
- 1 pt : $1 \geq a$ contradiction

4. À l'aide de la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de la question précédente, préciser laquelle des quatre propositions suivantes est vraie et justifier l'équivalent choisi :

- ❶ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n$. ❷ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n^2$. ❸ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n^2}$. ❹ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n}$.

- 1 pt : $\frac{u_{n+1}}{u_n^2} = 1 - \frac{2}{u_n} + \frac{1}{u_n^2}$

- 1 pt : penser à justifier que $u_n \neq 0$

5. a) Justifier que, pour tout entier naturel n , $\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$ existe et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n}$$

- 1 pt : existence
- 2 pt : calcul bien détaillé

b) En déduire, pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}$ en fonction de a et u_{n+1} .

- 1 pt : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1}$

- 1 pt : citer le télescopage

c) Conclure que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge et donner sa somme en fonction de a .

- 1 pt : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a-1}$

- 1 pt : la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a-1}$

Dans toute la suite, on suppose que $a = 2$.

6. a) Montrer que l'on définit bien la loi d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{u_n}$$

- 1 pt : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a-1} = \frac{1}{2-1} = 1$

- 1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{u_n} > 0$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $2^n(2^n - 1) + 1 \geq 2^{n+1}$.

- 2 pt : preuve bien détaillée par étapes

c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a l'inégalité $u_n \geq 2^n$ puis vérifier que cette dernière inégalité reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

- 1 pt : cas $n = 0$ et $n = 1$

- 1 pt : initialisation (cas $n = 2$)

- 2 pt : hérédité

d) Établir que X possède une espérance et une variance que l'on ne cherchera pas à calculer.

- 1 pt : X possède une variance ssi la série $\sum n^2 \mathbb{P}(X = n)$ converge (car il s'agit d'une série à termes positifs)

- 1 pt : $\frac{k^2}{u_k} \leq \frac{k^2}{2^k} = \frac{k(k-1)}{2^k} + \frac{k}{2^k} = k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k + k \left(\frac{1}{2}\right)^k$

- 1 pt : on reconnaît les termes généraux de séries géométriques dérivées et dérivées seconde de raison $q = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$, qui sont donc convergentes

- 1 pt : par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum n^2 \mathbb{P}(X = n)$ converge et donc que X possède une variance et une espérance

Exercice 3 (ECRICOME 2021)

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.

On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs. Si on obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1 .

Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face, ... alors X prend la valeur 5.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au $n^{\text{ème}}$ lancer ».
- P_n : « Obtenir Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

La suite $(P_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs ».
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n = \mathbb{P}(U_n) \quad \text{et} \quad a_n = \mathbb{P}([X = n])$$

Partie A

1. Exprimer les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k .
En déduire les valeurs de a_2 , a_3 et a_4 .

- 1 pt : $a_2 = \frac{1}{4} \quad ([X = 2] = P_1 \cap P_2)$
- 1 pt : $a_3 = \frac{1}{8} \quad ([X = 3] = F_1 \cap P_2 \cap P_3)$
- 1 pt : $a_4 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad ([X = 4] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4))$
- 1 pt : argument d'indépendance
- 1 pt : argument d'incompatibilité

2. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \sum_{k=2}^n a_k$.

- 1 pt : $U_n = \bigcup_{k=2}^n [X = k]$
- 1 pt : argument d'incompatibilité

3. a) Recopier et compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```
1 def simulX():
2     tirs = 0
3     pile = 0
4     while pile < 2 :
5         if rd.random() < 1/2:
6             pile = pile + 1
7         else:
8             pile = 0
9             tirs = tirs + 1
10    return tirs
```

- 4 pts total :

- 1 pt par ligne
- 1 pt bonus si tout est juste

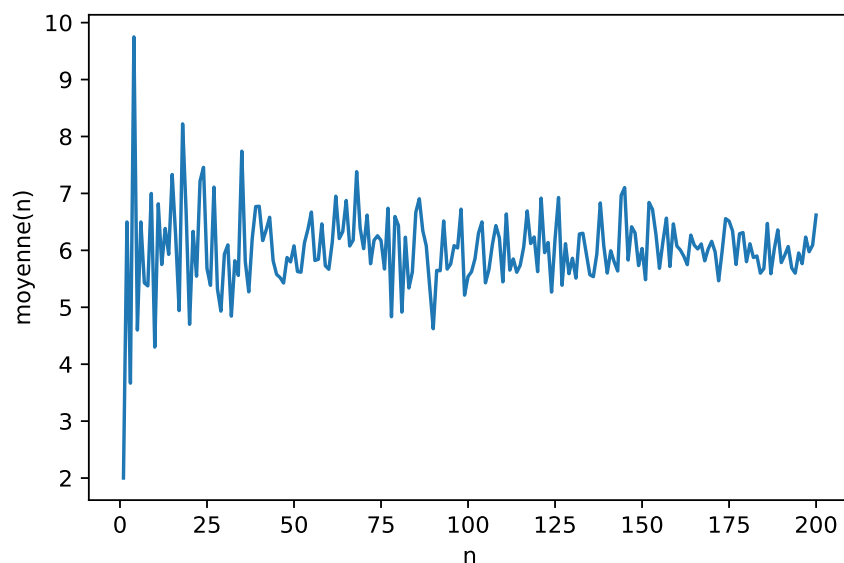
b) Écrire une fonction **Python** nommée `moyenne(n)` qui simule n fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

- 5 pts total :

```
1 def moyenne(n):
2     S = 0
3     for k in range(n):
4         S = S + simulX()
5     return S/n
```

- 1 pt : `S = 0`
- 1 pt : `for k in range(n):`
- 1 pt : `S = S + simulX()`
- 1 pt : `return S/n`
- 1 pt bonus si tout est correct

c) On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier n de $\llbracket 1, 200 \rrbracket$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

- 1 pt : $\mathbb{E}(X) \approx 6$
- 1 pt : Loi faible des grands nombres

Partie B

4. a) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$$

- 1 pt : $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$
- 1 pt : formule du crible

b) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

- 1 pt : $U_n \cap B_{n+1} = (U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1}) \cup (U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1})$
- 1 pt : $U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1} = U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$
- 1 pt : $U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1} = B_n \cap P_{n+1} = P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8} (1 - u_{n-2})$$

- 1 pt : $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$
- 1 pt : Comme les lancers sont indépendants, les événements U_{n-2} et $F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ sont indépendants
- 1 pt : argument d'incompatibilité
- 1 pt : calcul correct

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.

- 1 pt : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8} (1 - u_{n-2}) \geq 0$ car $u_{n-2} = \mathbb{P}(U_{n-2}) \leq 1$
- 1 pt : suite croissante et majorée + thm de convergence monotone
- 1 pt : $\ell = \ell + \frac{1}{8} (1 - \ell)$ donc $\ell = 1$

On admet que :

$$\mathbb{P}([X = -1]) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Partie C

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geq 2$:

$$v_n = 1 - u_n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=2}^n k \mathbb{P}([X = k])$$

6. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8} v_{n-2}$$

- 1 pt : calcul correct

7. Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}([X = n + 1]) = v_n - v_{n+1}$$

- 1 pt : $U_{n+1} = U_n \cup [X = n + 1]$

- 1 pt : Les événements $[X = n + 1]$ et U_n sont de plus incompatibles puisqu'on ne peut obtenir pour la première fois deux « Pile » consécutifs au $(n + 1)^{\text{ème}}$ lancer et à la fois les avoir obtenus au cours des n premiers lancers

- 1 pt : $\mathbb{P}([X = n + 1]) = \mathbb{P}(U_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n) = v_{n+1} - v_n = (1 - v_{n+1}) - (1 - v_n) = v_n - v_{n+1}$

8. Démontrer alors par récurrence, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$$

- 3 pts : initialisation pour $n = 2$

• 1 pt : $S_2 = \sum_{k=2}^2 k \mathbb{P}([X = k]) = 2 \mathbb{P}([X = 2]) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

• 1 pt : $v_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

• 1 pt : $v_4 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

- 2 pts : hérédité

9. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée.

- 1 pt : La suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{k \geq 2} k \mathbb{P}([X = k])$.

Or cette série est à termes positifs. Donc $(S_n)_{n \geq 2}$ est croissante

- 1 pt : $S_n \leq 6$

10. Montrer que X admet une espérance.

- 1 pt : La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum k \mathbb{P}([X = k])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente

- 1 pt : (S_n) converge par thm de convergence monotone donc la série $\sum_{k \geq 2} k \mathbb{P}([X = k])$ converge

11. a) Démontrer que la suite $(nv_n)_{n \geq 2}$ converge vers un réel λ .

- 1 pt : $nv_n = 6 - 8v_{n+2} - S_n$

- 1 pt : (S_n) converge et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.

À l'aide de l'égalité démontrée à la question 6., obtenir une contradiction.

-
- **1 pt** : si $\lambda \neq 0$ alors $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$ et donc la série $\sum v_n$ diverge par critère de Riemann
 - **1 pt** : or, la série $\sum v_n$ converge (télescopage cf question 7)
 - **1 pt** : qualité de la rédaction
- c) Donner alors la valeur de l'espérance de X .
- **1 pt** : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 6 - 8 \times 0 - 0 = 6$
 - **1 pt** : $\mathbb{E}(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 6$