

DS2 (vA) - Correction

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `numpy.random` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

Exercice 1 (ECRICOME 2008)

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On note $E = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ puis donner la dimension de E .

Démonstration.

• On remarque :

$$\begin{aligned} E &= \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \{aI + bA \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(I, A) \end{aligned}$$

Ainsi, E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Commentaire

- Ici, E est un ensemble dont les éléments sont des matrices écrites à l'aide de paramètres. Il y a tout lieu de penser que cet ensemble va pouvoir facilement s'écrire comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Cette méthode présente un double avantage. En effet, en plus de démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on obtient de plus que la famille $\mathcal{F} = (I, A)$ est génératrice de E . Ainsi :
 - × si $\mathcal{F}$ est une famille libre, c'est alors une base de E .
 - × si $\mathcal{F}$ est une famille liée, on peut extraire de $\mathcal{F}$ une base $\mathcal{G}$ de E . La famille $\mathcal{G}$ n'est autre que la famille $\mathcal{F}$ dans laquelle on a retiré tout vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.

- La famille $\mathcal{F} = (I, A)$:
 - × engendre E
 - × est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires
- On peut donc conclure que $\mathcal{F}$ est une base de E et

$$\dim(E) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 2$$

□

Commentaire

- Si la rédaction précédente est celle attendue, il arrive parfois qu'on ne puisse pas l'utiliser (dans certains cas, l'ensemble étudié ne s'écrit pas naturellement comme espace vectoriel engendré par une partie). Il est donc important de savoir utiliser la méthode consistant à revenir à la définition de sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Rappelons ci-dessous la rédaction.

(i) $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

(ii) $E \neq \emptyset$ car $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = M(0, 0) \in E$.

(iii) Démontrons que E est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(U, V) \in E^2$.

× Comme $U \in E$, il existe $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $U = M(a_1, b_1)$.

× Comme $V \in E$, il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $V = M(a_2, b_2)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot U + \mu \cdot V \\ = & \lambda \cdot M(a_1, b_1) + \mu \cdot M(a_2, b_2) \\ = & \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 + 2b_1 & -b_1 & -2b_1 \\ 2b_1 & a_1 - b_1 & -4b_1 \\ -b_1 & b_1 & a_1 + 3b_1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_2 + 2b_2 & -b_2 & -2b_2 \\ 2b_2 & a_2 - b_2 & -4b_2 \\ -b_2 & b_2 & a_2 + 3b_2 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \lambda a_1 + 2\lambda b_1 & -\lambda b_1 & -2\lambda b_1 \\ 2\lambda b_1 & \lambda a_1 - \lambda b_1 & -4\lambda b_1 \\ -\lambda b_1 & \lambda b_1 & \lambda a_1 + 3\lambda b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a_2 + 2\mu b_2 & -\mu b_2 & -2\mu b_2 \\ 2\mu b_2 & \mu a_2 - \mu b_2 & -4\mu b_2 \\ -\mu b_2 & \mu b_2 & \mu a_2 + 3\mu b_2 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} (\lambda a_1 + \mu a_2) + 2(\lambda b_1 + \mu b_2) & -(\lambda b_1 + \mu b_2) & -2(\lambda b_1 + \mu b_2) \\ 2(\lambda b_1 + \mu b_2) & (\lambda a_1 + \mu a_2) - (\lambda b_1 + \mu b_2) & -4(\lambda b_1 + \mu b_2) \\ -(\lambda b_1 + \mu b_2) & (\lambda b_1 + \mu b_2) & (\lambda a_1 + \mu a_2) + 3(\lambda b_1 + \mu b_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où : $\lambda \cdot U + \mu \cdot V = M(\lambda a_1 + \mu a_2, \lambda b_1 + \mu b_2) \in E$.

E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. a) Montrer que l'ensemble $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ est un espace vectoriel. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F puis donner la dimension de F .

Démonstration. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
 X \in F &\iff AX = X \\
 &\iff (A - I)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = y + 2z \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 F &= \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y + 2z \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
 &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

× génératrice de F

× libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires

Ainsi, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{F}_1$ est une base de F .

On en conclut : $\dim(F) = \text{Card}(\mathcal{F}_1) = 2$.

□

- b) Montrer que l'ensemble $G = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$ est un espace vectoriel. Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de G puis donner la dimension de G .

Démonstration.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
 X \in G &\iff AX = 2X \\
 &\iff (A - 2I)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} -y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - y = z \\ y = -2z \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 G &= \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \text{ et } y = -2z \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est :

- × génératrice de G .
 - × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.
- Ainsi, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{F}_2$ est une base de G .

On en conclut : $\dim(G) = \text{Card}(\mathcal{F}_2) = 1$.

□

3. a) Montrer que $F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Démonstration.

Par double inclusion.

($\supseteq$) • Comme $A \times 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ alors $0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \in F$.

• Comme $A \times 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = 2 \cdot 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ donc $0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \in G$.

Ainsi $0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \in F \cap G$.

(c'est attendu : F et G sont deux sev de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc contiennent tous les deux $0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$)

($\subseteq$) Soit $X \in F \cap G$.

• Comme $X \in F$, $AX = X$.

• Comme $X \in G$, $AX = 2X$.

On en déduit que $X = 2X$ et donc que $X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

$$F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

□

b) Montrer que la famille $\mathcal{B}$ obtenue en réunissant les vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$ de F et de la base $\mathcal{B}_2$ de G forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration.

Montrons que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\text{Or : } (*) \iff \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\stackrel{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{par remontées successives})$$

La famille $\mathcal{B}$ est bien une famille libre.

La famille $\mathcal{B}$ est :

- × libre,
- × telle que : $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

□

c) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis celles du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration.

- On a directement :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ dans la base $\mathcal{B}$.

- Comme $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe un unique triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$\text{Or : } (*) \iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 - 2\alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ -2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ -2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 3 \\ -2\alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ -2\alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(5, -1, 2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

□

4. On considère la matrice P définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1} .

Démonstration.

On procède par la méthode du pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue les opérations $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure). De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P .

On effectue les opérations $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \end{cases}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération $\{ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue les opérations $\begin{cases} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{cases}$. On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

On en déduit que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

□

b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On en conclut : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

□

5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Prouver que la matrice $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 P^{-1}M(a, b)P &= P^{-1}(aI + bA)P \\
 &= P^{-1}aIP + P^{-1}bAP \\
 &= aP^{-1}P + bP^{-1}AP \\
 &= aI + bD
 \end{aligned}$$

Ainsi : $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$ est bien diagonale.

□

b) Montrer que $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ est inversible.

En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a, b)$ soit inversible.

Démonstration.

• Démontrons tout d'abord la caractérisation de l'inversibilité de $M(a, b)$.

($\Rightarrow$) On suppose que $M(a, b)$ est inversible.

Alors, d'après la question 6.a) :

$$D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$$

$D(a, b)$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

($\Leftarrow$) On suppose que $D(a, b)$ est inversible.

Alors, d'après la question 6.a) :

$$M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$$

$M(a, b)$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

Finalement : $M(a, b)$ est inversible $\Leftrightarrow D(a, b) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$ est inversible.

- La matrice $D(a, b)$ est diagonale.
Elle est donc inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

$$\text{On en conclut : } M(a, b) \text{ est inversible} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b \neq 0 \\ a + b \neq 0 \end{cases}.$$

□

- c) Prouver que $(M(a, b))^2 = I$ si et seulement si $(D(a, b))^2 = I$.
En déduire l'existence de quatre matrices $M(a, b)$ que l'on déterminera, vérifiant :

$$(M(a, b))^2 = I$$

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} (M(a, b))^2 = I &\Leftrightarrow (P D(a, b) P^{-1})^2 = I \\ &\Leftrightarrow (P D(a, b) P^{-1}) (P D(a, b) P^{-1}) = I \\ &\Leftrightarrow P D(a, b) (P^{-1} P) D(a, b) P^{-1} = I \\ &\Leftrightarrow P (D(a, b))^2 P^{-1} = I \\ &\Leftrightarrow (D(a, b))^2 P^{-1} = P^{-1} I \\ &\Leftrightarrow (D(a, b))^2 = P^{-1} I P \\ &\Leftrightarrow (D(a, b))^2 = I \end{aligned}$$

$$\text{On a bien : } (M(a, b))^2 = I \Leftrightarrow (D(a, b))^2 = I.$$

- Or : $D(a, b) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$(D(a, b))^2 = I \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2b)^2 = 1 \\ (a+b)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2b = 1) \text{ OU } (a+2b = -1) \\ (a+b = 1) \text{ OU } (a+b = -1) \end{cases}$$

En distinguant les 4 cas possibles, on obtient les 4 systèmes d'équations suivants :

$$(S_1) \begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} a + 2b = -1 \\ a + b = 1 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} a + 2b = -1 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

- Or : $(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = 1 \end{cases}$

$$\xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} a + 2b = 1 \\ -b = 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \begin{cases} a = 1 \\ -b = 0 \end{cases}$$

$$\text{Et : } (S_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \Longleftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} a + 2b = 1 \\ -b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ \Longleftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} a = -3 \\ -b = -2 \end{cases}$$

$$\text{Puis : } (S_3) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a + 2b = -1 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \Longleftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} a + 2b = -1 \\ -b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ \Longleftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} a = 3 \\ -b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Enfin : } (S_4) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a + 2b = -1 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \Longleftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} a + 2b = -1 \\ -b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ \Longleftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} a = -1 \\ -b = 0 \end{cases}$$

Finalement :

$$(D(a, b))^2 = I \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b) = (1, 0) \\ (a, b) = (-3, 2) \\ (a, b) = (3, -2) \\ (a, b) = (-1, 0) \end{cases}$$

Les matrices $M(a, b)$ vérifiant $(M(a, b))^2 = I$ sont donc
 $M(1, 0)$, $M(-3, 2)$, $M(3, -2)$ et $M(-1, 0)$.

Commentaire

- Pour ne pas avoir à résoudre 4 fois le même système (à changement du second membre près), on pouvait le résoudre avec un second membre quelconque. Plus précisément, on pouvait résoudre le système (S) suivant :

$$\begin{aligned}
 (S) \quad & \Longleftrightarrow \begin{cases} a + 2b = x \\ a + b = y \end{cases} \\
 & \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a + 2b = x \\ -b = -x + y \end{cases} \\
 & \stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a = -x + 2y \\ -b = -x + y \end{cases} \\
 & \stackrel{L_2 \leftarrow -L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a = -x + 2y \\ b = x - y \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi la solution pour n'importe quel couple (x, y) choisi (par exemple, on considérant $(x, y) = (1, 0)$ on obtient les solution de (S_1)).

- On pouvait aussi rapprocher les résolutions de (S_1) et (S_4) (et la résolution de (S_2) de celle de (S_3)). Si on considère $(\alpha, \beta) = (-a, -b)$ alors :

$$\begin{aligned}
 (S_4) \quad & \Longleftrightarrow \begin{cases} a + 2b = -1 \\ a + b = -1 \end{cases} \\
 & \Longleftrightarrow \begin{cases} -a - 2b = 1 \\ -a - b = 1 \end{cases} \\
 & \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ce dernier système a pour solution $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ et ainsi (S_4) a pour solution $(a, b) = (-1, 0)$.

□

Exercice 2 (EDHEC 2026)

On considère un nombre réel a strictement supérieur à 1, ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = a$ et par la relation de récurrence, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$$

1. Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle retourne la valeur de u_n pour des valeurs données de n et de a :

```

1  def suite_u(a,n):
2      u=-----
3      for k in range(1,n+1):
4          u=-----
5      return u

```

Démonstration.

On propose de compléter cette fonction **Python** de la manière suivante :

```

1  def suite_u(a,n):
2      u= a
3      for k in range(1,n+1):
4          u= u**2 - u + 1
5      return u

```

□

2. Montrer que si l'on suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est $\ell = 1$.

Démonstration.

Notons $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de la suite (u_n) (on a supposé qu'elle existait). Alors :

$$\times u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \text{ (suite extraite) ;}$$

$$\times u_n^2 - u_n + 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell^2 - \ell + 1 \text{ (par continuité de } f : x \mapsto x^2 - x + 1 \text{ sur } \mathbb{R}).$$

D'où, par passage à la limite :

$$\ell = \ell^2 - \ell + 1$$

Ceci se réécrit $\ell^2 - 2\ell + 1 = 0$ et donc $(\ell - 1)^2 = 0$.

On en déduit que $\ell = 1$.

□

3. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geqslant 0$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

□

- b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant a$.

Démonstration.

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : \ll u_n \geq a \gg$.

Initialisation :

Par définition $u_0 = a$. D'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence : $u_n \geq a$. De plus, par croissance de la suite $(u_n) : u_{n+1} \geq u_n$. On en déduit que $u_{n+1} \geq a$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq a$.

□

c) Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration.

Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite (u_n) soit majorée.

Alors, (u_n) est une suite croissante (d'après la question 3.a)) et majorée et donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite ℓ .

D'après la question 2, on a $\ell = 1$.

Or, par passage à la limite dans l'inégalité de la question 3.b, on a : $\ell \geq a$.

On obtient $1 \geq a$. Or, $a > 1$, c'est donc absurde.

On en déduit que la suite (u_n) n'est pas majorée.

On peut alors conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

□

4. À l'aide de la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de la question précédente, préciser laquelle des quatre propositions suivantes est vraie et justifier l'équivalent choisi :

❶ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n$. ❷ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n^2$. ❸ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n^2}$. ❹ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u_n}$.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq a > 0$ d'après la question 3.b) et donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n^2} = 1 - \frac{2}{u_n} + \frac{1}{u_n^2}$$

Or, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ d'après la question 3.c). On en déduit que $\frac{u_{n+1}}{u_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

On en déduit que $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n^2$.

□

5. a) Justifier que, pour tout entier naturel n , $\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$ existe et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n}$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question **3.b)**, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geq a > 1$ et donc $\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$ existe.

De plus :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} &= \frac{u_{n+1} - \cancel{1} - (u_n - \cancel{1})}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)} \\ &= \frac{(u_n - 1)^2}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)} \\ &= \frac{u_n - 1}{u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{u_n - 1}{u_n^2 - u_n} \\ &= \frac{u_n - 1}{u_n(u_n - 1)} \\ &= \frac{1}{u_n} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n}.$$

□

b) En déduire, pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}$ en fonction de a et u_{n+1} .

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \quad (\text{par télescopage}) \\ &= \frac{1}{a - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}.$$

□

c) Conclure que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge et donner sa somme en fonction de a .

Démonstration.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

Or, d'après la question **3.c**), $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. D'où :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a-1}$$

On en déduit que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a-1}$.

□

Dans toute la suite, on suppose que $a = 2$.

6. a) Montrer que l'on définit bien la loi d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{u_n}$$

Démonstration.

D'après la question **5.c**) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{a-1} = \frac{1}{2-1} = 1$$

De plus, d'après la question **3.b**), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq a > 0$ et donc $\frac{1}{u_n} > 0$.

Ainsi, la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ définit bien une loi de probabilité.

□

b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $2^n(2^n - 1) + 1 \geq 2^{n+1}$.

Démonstration.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On a $2^n \geq 2^2 = 4$ donc $2^n - 1 \geq 3 \geq 2$ donc $2^n(2^n - 1) \geq 2^n \times 2 = 2^{n+1}$ et finalement $2^n(2^n - 1) + 1 \geq 2^n(2^n - 1) \geq 2^{n+1}$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $2^n(2^n - 1) + 1 \geq 2^{n+1}$.

□

c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a l'inégalité $u_n \geq 2^n$ puis vérifier que cette dernière inégalité reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

Démonstration.

• Tout d'abord :

$$u_0 = a = 2 \geq 2^0$$

$$u_1 = 2^2 - 2 + 1 = 3 \geq 2^1$$

$$u_2 = 3^2 - 3 + 1 = 7 \geq 2^2$$

Ainsi, l'inégalité $u_n \geq 2^n$ est valable pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

- Montrons par récurrence : $\forall n \geq 2, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geq 2^n$ ».

Initialisation :

D'après ce qui précède, $u_2 \geq 2^2$. D'où $\mathcal{P}(2)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On a, par définition de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n^2 - u_n + 1 \\ &= u_n(u_n - 1) + 1 \\ &\geq 2^n(2^n - 1) + 1 && (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &\geq 2^{n+1} && (\text{d'après la question 6.b}) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2^n$.

□

- d) Établir que X possède une espérance et une variance que l'on ne cherchera pas à calculer.

Démonstration.

Il suffit de montrer que X possède une variance. Or :

$$\begin{aligned} X \text{ possède une variance} &\iff \text{la série } \sum n^2 \mathbb{P}(X = n) \text{ converge absolument} \\ &\iff \text{la série } \sum n^2 \mathbb{P}(X = n) \text{ converge} \\ &\quad (\text{car il s'agit d'une série à termes positifs}) \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{u_k}$$

D'après la question 6.c), pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{k^2}{u_k} \leq \frac{k^2}{2^k} = \frac{k(k-1)}{2^k} + \frac{k}{2^k} = k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k + k \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

On reconnaît les termes généraux de séries géométriques dérivées et dérivées seconde de raison $q = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$, qui sont donc convergentes.

Ainsi, la série $\sum \frac{k^2}{2^k}$ converge.

Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum n^2 \mathbb{P}(X = n)$ converge et donc que X possède une variance et une espérance.

□

Exercice 3 (ECRICOME 2021)

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.

On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs. Si on obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1 .

Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face, ... alors X prend la valeur 5.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au $n^{\text{ème}}$ lancer ».
- P_n : « Obtenir Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

La suite $(P_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs ».
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n = \mathbb{P}(U_n) \quad \text{et} \quad a_n = \mathbb{P}([X = n])$$

Partie A

- Exprimer les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k .
En déduire les valeurs de a_2 , a_3 et a_4 .

Démonstration.

- L'événement $[X = 2]$ est réalisé si et seulement si on obtient pour la 1^{ère} fois deux « Pile » consécutifs au 2^{ème} lancer.

Ainsi : $[X = 2] = P_1 \cap P_2$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
a_2 &= \mathbb{P}([X = 2]) \\
&= \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) \\
&= \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) && \text{(car } P_1 \text{ et } P_2 \text{ sont indépendants)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} && \text{(car la pièce est équilibrée)}
\end{aligned}$$

D'où : $a_2 = \frac{1}{4}$.

- L'événement $[X = 3]$ est réalisé si et seulement si on obtient pour la 1^{ère} fois deux « Pile » consécutifs au 3^{ème} lancer. Pour cela, on doit avoir obtenu « Face » au 1^{er} lancer puis 2 « Pile ». (on ne peut obtenir « Pile » au 1^{er} lancer, sinon les deux « Pile » consécutifs seraient obtenus pour la 1^{ère} fois au 2^{ème} lancer et non au 3^{ème})

Ainsi : $[X = 3] = F_1 \cap P_2 \cap P_3$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \mathbb{P}([X = 3]) \\
 &= \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \\
 &= \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(P_3) && \text{(car } F_1, P_2 \text{ et } P_3 \text{ sont} \\
 &&& \text{mutuellement indépendants)} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} && \text{(car la pièce est équilibrée)}
 \end{aligned}$$

D'où : $a_3 = \frac{1}{8}$.

- L'événement $[X = 4]$ est réalisé si et seulement si on obtient pour la 1^{ère} fois deux « Pile » consécutifs au 4^{ème} lancer. Pour cela, on doit avoir obtenu « Face » au 2^{ème} lancer puis 2 « Pile » au 3^{ème} et 4^{ème} lancer. Le résultat du 1^{er} lancer peut être « Pile » ou « Face ».
(on ne peut obtenir « Pile » au 2^{er} lancer, sinon les deux « Pile » consécutifs seraient obtenus pour la 1^{ère} fois au 3^{ème} lancer et non au 4^{ème})

Ainsi : $[X = 4] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 a_4 &= \mathbb{P}([X = 4]) \\
 &= \mathbb{P}\left((P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)\right) \\
 &= \mathbb{P}(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) && \text{(car c'est une union} \\
 &&& \text{d'événements incompatibles)} \\
 &= \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(F_2) \times \mathbb{P}(P_3) \times \mathbb{P}(P_4) + \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2) \times \mathbb{P}(P_3) \times \mathbb{P}(P_4) && \text{(car ce sont des intersections} \\
 &&& \text{d'événements indépendants)} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 && \text{(car la pièce est équilibrée)}
 \end{aligned}$$

D'où : $a_4 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

□

2. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \sum_{k=2}^n a_k$.

Démonstration.

Soit $n \geq 2$.

- L'événement U_n est réalisé si et seulement si, au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs. Ceci est équivalent à obtenir deux piles consécutifs **pour la 1^{ère} fois** :
 - × soit au 2^{ème} lancer,
 - × soit au 3^{ème} lancer,
 - × $\dots$,
 - × soit au $(n-1)$ ^{ème} lancer,
 - × soit au n ^{ème} lancer.

Autrement dit : $U_n = \bigcup_{k=2}^n [X = k]$.

- Comme les événements $[X = 2], \dots, [X = n]$ sont incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}(U_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^n [X = k]\right) = \sum_{k=2}^n \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=2}^n a_k$$

$$\text{D'où, pour tout } n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket : u_n = \mathbb{P}(U_n) = \sum_{k=2}^n a_k.$$

Commentaire

- Démontrons que les événements $[X = 2], \dots, [X = n]$ sont deux à deux incompatibles.
 - × Par définition de la v.a.r. $X : X(\Omega) \subset \llbracket 2, +\infty \rrbracket$.
 - × Ainsi la famille $([X = k])_{k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket}$ forme un système complet d'événements. En particulier, les événements $[X = 2], \dots, [X = n]$ sont incompatibles.
- On peut aussi démontrer que les événements $[X = 2], \dots, [X = n]$ sont incompatibles en utilisant la définition d'incompatibilité.

Soit $(i, j) \in (\llbracket 2, n \rrbracket)^2$ tel que : $i \neq j$.

L'événement $[X = i] \cap [X = j]$ est réalisé si et seulement on obtient pour la 1^{ère} fois deux piles consécutifs à la fois au $i^{\text{ème}}$ et au $j^{\text{ème}}$ lancer. Cela est impossible car : $i \neq j$. Ainsi :

$$[X = i] \cap [X = j] = \emptyset$$

3. a) Recopier et compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```

1  def simulX():
2      tirs = 0
3      pile = 0
4      while pile ____:
5          if rd.random() < 1/2:
6              pile = pile + 1
7          else:
8              pile = ____
9              tirs = ____
10     return tirs

```

Démonstration.

On propose la fonction **Python** suivante.

```
1 def simulX():
2     tirs = 0
3     pile = 0
4     while pile < 2:
5         if rd.random() < 1/2:
6             pile = pile + 1
7         else:
8             pile = 0
9             tirs = tirs + 1
10    return tirs
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**

On commence par préciser la structure de la fonction :

- × cette fonction se nomme `simulX`,
- × elle ne prend pas de paramètre en entrée.

```
1 def simulX():
```

En ligne 2, la variable `tirs`, qui contiendra le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs pour la 1^{ère} fois, est initialisée à 0 (aucun lancer n'a encore été effectué).

```
2     tirs = 0
```

En ligne 3, la variable `pile`, qui contiendra le nombre de piles consécutifs, est initialisée à 0.

```
3     pile = 0
```

- **Structure itérative**

- × Les lignes 4 à 9 consistent à déterminer le rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs. On doit donc effectuer des lancers de pièce jusqu'à obtenir deux « Pile » consécutifs. Autrement dit, on doit effectuer des lancers de pièce tant que le nombre de piles consécutifs est strictement inférieur à 2.

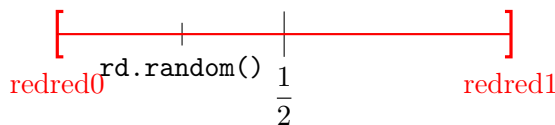
(on rappelle que c'est la variable `pile` qui contient le nombre de piles consécutifs)

Pour cela on met en place une structure itérative (boucle **while**) :

```
4     while pile < 2:
```

- × En ligne 5, la fonction utilise la commande `rd.random()`.
L'instruction `rd.random()` renvoie un réel choisi aléatoirement dans $[0, 1]$.
Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.

- × Cette valeur choisie aléatoirement dans $[0, 1]$ permet d'obtenir une simulation d'un lancer de pièce équilibrée.



Deux cas se présentent.

- Si $\text{rd.random()} < \frac{1}{2}$: alors, on considère qu'on a obtenu « Pile ».
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[0 \leq U \leq \frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[U \leq \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}$$

ce qui correspond bien à un lancer de pièce équilibrée.

Dans ce cas, on met à jour la variable `pile` en l'incrémentant de 1.

```
5         if rd.random() < 1/2:
6             pile = pile + 1
```

- Si $\text{rd.random()} \geq \frac{1}{2}$: alors, on considère qu'on a obtenu « Face ».
Ce cas se produit avec la probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} \leq U \leq 1\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{2} \leq U\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[U < \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}$$

Dans ce cas, le nombre de « Pile » consécutifs est ré-initialisé à 0. On met donc à jour la variable `pile` en conséquence.

```
7         else:
8             pile = 0
```

- × La variable `tirs` est incrémentée de 1 pour signifier qu'on a effectué 1 lancer supplémentaire.

```
9             tirs = tirs + 1
```

• Fin de la fonction

À l'issue de la boucle `while`, la variable `tirs` contient le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la 1^{ère} fois deux « Pile » consécutifs. Elle contient donc une simulation de la v.a.r. X . Il ne reste plus qu'à renvoyer cette valeur.

```
10         return tirs
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Python** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.

On procèdera de même dans les autres questions **Python**. □

- b) Écrire une fonction **Python** nommée `moyenne(n)` qui simule n fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

Démonstration.

On propose la fonction **Python** suivante.

```
1 def moyenne(n):  
2     S = 0  
3     for k in range(n):  
4         S = S + simulX()  
5     return S/n
```

Détaillons les éléments de ce script.

- **Début de la fonction**

On commence par préciser la structure de la fonction :

- × cette fonction se nomme `moyenne`,
- × elle prend en entrée un paramètre n .

En ligne 2, on commence par initialiser la variable S à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

- **Structure itérative**

Les lignes 3 à 4 permettent de mettre à jour la variable S pour qu'elle contienne la somme de n simulations de la v.a.r. X . Pour cela on met en place une structure itérative (boucle `for`) et on utilise la fonction `simulX` définie en question précédente pour obtenir des simulations de la v.a.r. X .

```
3     for k in range(n):  
4         S = S + simulX()
```

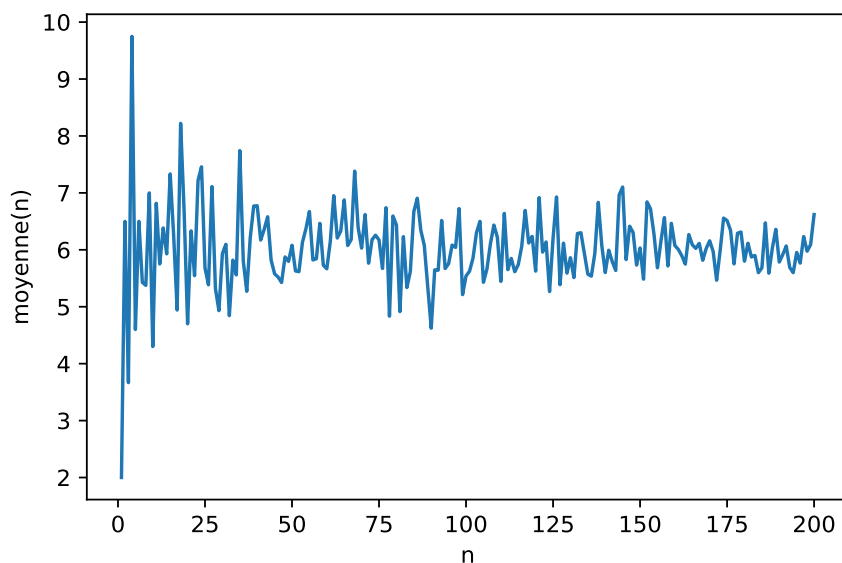
- **Fin de la fonction**

À l'issue de cette boucle `for`, la variable S contient la somme de n simulations de la v.a.r. X . La variable S / n contient alors la moyenne des n simulations de X (ce qui était demandé).

```
5     return S/n
```

□

- c) On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier n de $\llbracket 1, 200 \rrbracket$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

Démonstration.

- Soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$. On note $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon de la v.a.r. X .
D'après la question précédente, la fonction `moyenne` renvoie une simulation de la variable aléatoire $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
- Le graphe de cette question présente donc des simulations de $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{200}$.
- L'idée naturelle pour obtenir une approximation de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ est :
 - × de simuler un grand nombre de fois ($N = 200$ est ici ce grand nombre) la v.a.r. X .
Formellement, on souhaite obtenir un N -uplet $(x_1, \dots, x_N)$ qui correspond à l'observation d'un N -échantillon $(X_1, \dots, X_N)$ de la v.a.r. X .
(les v.a.r. X_i sont indépendantes et de même loi que X)
 - × de réaliser la moyenne des résultats de cette observation.

Cette idée est justifiée par la loi faible des grands nombres (LfGN) qui affirme :

$$\text{moyenne de l'observation} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \simeq \mathbb{E}(X)$$

- On en déduit que la courbe représentée se rapproche de $\mathbb{E}(X)$.

On conjecture alors : $\mathbb{E}(X) \approx 6$.

□

Partie B

4. a) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$$

Démonstration.

Soit $n \geq 2$.

- Par définition de U_n , on a : $U_n = \bigcup_{k=2}^n B_k$. Ainsi :

$$U_{n+1} = \bigcup_{k=2}^{n+1} B_k = \left(\bigcup_{k=2}^n B_k \right) \cup B_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$$

- On en déduit, par formule du crible :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_{n+1}) &= \mathbb{P}(U_n \cup B_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) \end{aligned}$$

$\forall n \geq 2, \mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$

□

b) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

Démonstration.

Soit $n \geq 4$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} U_n \cap B_{n+1} &= (U_n \cap B_{n+1}) \cap \Omega \\ &= (U_n \cap B_{n+1}) \cap (F_{n-1} \cup P_{n-1}) && \text{(car } (F_{n-1}, P_{n-1}) \text{ forme un système complet d'événements)} \\ &= (U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1}) \cup (U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1}) && \text{(d'après les lois de Morgan)} \end{aligned}$$

- Étudions alors les 2 événements de l'union.

× D'une part :

$$U_n = \bigcup_{k=2}^n B_k = \left(\bigcup_{k=2}^{n-2} B_k \right) \cup B_{n-1} \cup B_n = U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n$$

Ainsi, d'après les lois de Morgan :

$$U_n \cap F_{n-1} = (U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n) \cap F_{n-1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1}) \cup (B_{n-1} \cap F_{n-1}) \cup (B_n \cap F_{n-1})$$

Or :

- par définition de B_{n-1} :

$$B_{n-1} \cap F_{n-1} = (P_{n-2} \cap P_{n-1}) \cap F_{n-1} = P_{n-2} \cap (P_{n-1} \cap F_{n-1}) = P_{n-2} \cap \emptyset = \emptyset$$

- par définition de B_n :

$$B_n \cap F_{n-1} = (P_{n-1} \cap P_n) \cap F_{n-1} = P_n \cap (P_{n-1} \cap F_{n-1}) = P_n \cap \emptyset = \emptyset$$

On en déduit :

$$U_n \cap F_{n-1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1}) \cup \emptyset \cup \emptyset = U_{n-2} \cap F_{n-1}$$

Finalement, par définition de B_{n+1} :

$$U_n \cap F_{n-1} \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}.$$

× D'autre part :

$$U_n \cap P_{n-1} \cap B_{n+1} = U_n \cap P_{n-1} \cap (P_n \cap P_{n+1}) = U_n \cap (P_{n-1} \cap P_n) \cap P_{n+1} = U_n \cap B_n \cap P_{n+1}$$

Or, comme $U_n = \bigcup_{k=2}^n B_k$, alors : $B_n \subset U_n$. D'où : $U_n \cap B_n = B_n$.

$$\text{Ainsi : } U_n \cap P_{n-1} \cap B_{n+1} = B_n \cap P_{n+1} = P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}.$$

$$\text{Finalement : } U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}). \quad \square$$

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8} (1 - u_{n-2})$$

Démonstration.

• D'après la question 4.a) :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{P}(U_{n+1}) & = & \mathbb{P}(U_n) & + & \mathbb{P}(B_{n+1}) & - & \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) \\ \parallel & & \parallel & & & & \\ u_{n+1} & & u_n & & & & \end{array}$$

• De plus, comme P_n et P_{n+1} sont indépendants :

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(P_n \cap P_{n+1}) = \mathbb{P}(P_n) \times \mathbb{P}(P_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

• Ensuite, d'après la question précédente :

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

C'est une union d'événements incompatibles. D'où :

$$\mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) + \mathbb{P}(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

× D'une part, comme les événements P_{n-1} , P_n et P_{n+1} sont mutuellement indépendants :

$$\mathbb{P}(P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) = \mathbb{P}(P_{n-1}) \times \mathbb{P}(P_n) \times \mathbb{P}(P_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

× D'autre part :

- l'événement U_{n-2} se réfère aux $n-2$ premiers lancers (lancers 1 à $n-2$),
- l'événement $F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ se réfère aux lancers $n-1$, n et $n+1$.

Comme les lancers sont indépendants, les événements U_{n-2} et $F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ sont donc indépendants. On en conclut :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) &= \mathbb{P}(U_{n-2}) \times \mathbb{P}(F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \\ &= u_{n-2} \times \mathbb{P}(F_{n-1}) \times \mathbb{P}(P_n) \times \mathbb{P}(P_{n+1}) \quad (\text{car } F_{n-1}, P_n \text{ et } P_{n+1} \\ &\quad \text{sont indépendants}) \\ &= u_{n-2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} u_{n-2} \end{aligned}$$

- En rassemblant les résultats précédents, on obtient :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{8} u_{n-2} + \frac{1}{8} \right) = u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} u_{n-2}$$

Finalement : $\forall n \geq 4, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8} (1 - u_{n-2})$.

□

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.

Démonstration.

- Soit $n \geq 4$. D'après la question précédente :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8} (1 - u_{n-2})$$

Or : $u_{n-2} = \mathbb{P}(U_{n-2}) \leq 1$. D'où : $1 - u_{n-2} \geq 0$. On en déduit :

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

La suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est donc croissante.

- Pour tout $n \geq 4$: $u_n = \mathbb{P}(U_n) \leq 1$. Ainsi la suite $(u_n)_{n \geq 4}$ est :

× croissante,

× majorée par 1.

Elle converge donc vers une limite ℓ vérifiant : $\ell \leq 1$.

- Enfin, toujours d'après la question précédente, pour tout $n \geq 4$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8} (1 - u_{n-2})$$

Ainsi, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$\ell = \ell + \frac{1}{8} (1 - \ell)$$

$$\text{donc } 0 = \frac{1}{8} (1 - \ell)$$

$$\text{d'où } 0 = 1 - \ell$$

$$\text{ainsi } \ell = 1$$

Finalement, la suite (u_n) converge vers 1.

Commentaire

On pouvait également démontrer la croissance de la suite de la suite (u_n) en exploitant le fait que la suite (U_n) est une suite croissante d'événements.

- Soit $n \geq 2$. On remarque : $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$ (démontré en question 4.a)). Ainsi :

$$U_n \subset U_{n+1}$$

- Par croissance de $\mathbb{P}$, on obtient :

$$\mathbb{P}(U_n) \leq \mathbb{P}(U_{n+1})$$

D'où : $u_n \leq u_{n+1}$.

□

On **admet** que :

$$\mathbb{P}([X = -1]) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Partie C

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geq 2$:

$$v_n = 1 - u_n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=2}^n k \mathbb{P}([X = k])$$

6. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8} v_{n-2}$$

Démonstration.

Soit $n \geq 4$.

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= (\cancel{1} - u_n) - (\cancel{1} - u_{n+1}) && (\text{par définition de } v_n \text{ et } v_{n+1}) \\ &= u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{1}{8} (1 - u_{n-2}) && (\text{d'après 4.c}) \\ &= \frac{1}{8} v_{n-2} && (\text{par définition de } v_{n-2}) \end{aligned}$$

$\forall n \geq 4, v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8} v_{n-2}$

□

7. Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}([X = n + 1]) = v_n - v_{n+1}$$

Démonstration.

Soit $n \geq 2$.

- Comme $v_n = 1 - u_n = 1 - \mathbb{P}(U_n)$, nous allons établir une relation entre les événements $[X = n + 1]$, U_n et U_{n+1} pour répondre à cette question.

Tout d'abord, l'événement U_{n+1} est réalisé si et seulement si on obtient deux « Pile » consécutifs au cours des $n + 1$ premiers lancers. Autrement dit, U_{n+1} est réalisé si et seulement si :

- × soit on a obtenu deux « Pile » consécutifs au cours des n premiers lancers,
- × soit on a obtenu deux « Pile » consécutifs pour la première fois au $(n + 1)^{\text{ème}}$ lancer.

Ainsi :

$$U_{n+1} = U_n \cup [X = n + 1]$$

- Les événements $[X = n + 1]$ et U_n sont de plus incompatibles puisqu'on ne peut obtenir pour la première fois deux « Pile » consécutifs au $(n + 1)^{\text{ème}}$ lancer et à la fois les avoir obtenus au cours des n premiers lancers.

On obtient alors :

$$\mathbb{P}(U_{n+1}) = \mathbb{P}(U_n \cup [X = n + 1]) = \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}([X = n + 1])$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}([X = n + 1]) = \mathbb{P}(U_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n) = u_{n+1} - u_n = (1 - v_{n+1}) - (1 - v_n) = v_n - v_{n+1}$$

$\forall n \geq 2, \mathbb{P}([X = n + 1]) = v_n - v_{n+1}$

Commentaire

- Notons qu'on pouvait justifier l'égalité entre événements $U_{n+1} = U_n \cup [X = n+1]$ « en démontrant au préalable l'égalité $U_{n+1} = \bigcup_{k=2}^{n+1} [X = k]$ ». Détaillons cette manière de procéder.
- Pour tout $p \geq 2$, on commence par remarquer :

$$U_p = \bigcup_{k=2}^p [X = k]$$

En effet, l'événement U_p est réalisé si et seulement si on obtient deux « Pile » consécutifs au cours des k premiers lancers. Autrement dit U_p est réalisé si et seulement si :

- × soit on a obtenu deux « Pile » consécutifs pour la 1^{ère} fois au 2^{ème} lancer,
- × soit on a obtenu deux « Pile » consécutifs pour la 1^{ère} fois au 3^{ème} lancer,
- × ...
- × soit on a obtenu deux « Pile » consécutifs pour la 1^{ère} fois au $p^{\text{ème}}$ lancer,

On en déduit :

$$U_{n+1} = \bigcup_{k=2}^{n+1} [X = k] = \left(\bigcup_{k=2}^n [X = k] \right) \cup [X = n+1] = U_n \cup [X = n+1]$$

- Avec ce procédé, l'incompatibilité des événements $U_n = \bigcup_{k=2}^n [X = k]$ et $[X = n+1]$ pouvait s'obtenir en remarquant que la famille $([X = k])_{k \in -1 \cup \mathbb{N}[2, +\infty[}$ forme un système complet d'événements (car $X(\Omega) \subset \{-1\} \cup \mathbb{N}[2, +\infty[$).

□

8. Démontrer alors par récurrence, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$$

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}[2, +\infty[, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$.

► Initialisation

- D'une part :

$$S_2 = \sum_{k=2}^2 k \mathbb{P}([X = k]) = 2 \mathbb{P}([X = 2]) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

où l'avant-dernière égalité est obtenue avec la question 1.

- Calculons d'autre part v_2 et v_4 .
 - × Calcul de v_2 . Tout d'abord :

$$v_2 = 1 - u_2 = 1 - \mathbb{P}(U_2) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^2 B_k\right) = 1 - \mathbb{P}(B_2)$$

Or, par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) = \frac{1}{4}$$

On en déduit : $v_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

× Calcul de v_4 . Tout d'abord :

$$v_4 = 1 - u_4 = 1 - \mathbb{P}(U_4)$$

Or, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(U_4) = \mathbb{P}(U_3) + \mathbb{P}([X = 4]) = \left(\mathbb{P}(U_2) + \mathbb{P}([X = 3]) \right) + \mathbb{P}([X = 4])$$

D'après le calcul de v_2 et la question 1., on en déduit :

$$\mathbb{P}(U_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Ainsi : $v_4 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Finalement :

$$6 - 8v_4 - 2v_2 = 6 - 8 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{3}{4} = 6 - 4 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

D'où $\mathcal{P}(2)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $S_{n+1} = 6 - 8v_{n+2} - (n+1)v_{n+1}$).

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=2}^{n+1} k \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \sum_{k=2}^n k \mathbb{P}([X = k]) + (n+1) \mathbb{P}([X = n+1]) \\ &= S_n + (n+1)(v_n - v_{n+1}) && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= 6 - 8v_{n+2} - nv_n + (n+1)v_n - (n+1)v_{n+1} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= 6 - 8v_{n+2} + v_n - (n+1)v_{n+1} \end{aligned}$$

Or, d'après la question 6. (qui est applicable car, comme $n \geq 2$, alors $n+2 \geq 4$) :

$$v_{n+2} - v_{n+3} = \frac{1}{8} v_n$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 6 - 8 \left(v_{n+3} + \frac{1}{8} v_n \right) + v_n - (n+1)v_{n+1} \\ &= 6 - 8v_{n+3} - \cancel{v_n} + \cancel{v_n} - (n+1)v_{n+1} \\ &= 6 - 8v_{n+3} - (n+1)v_{n+1} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \geq 2, S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$.

Commentaire

Si l'on avait utilisé en question précédente la relation :

$$\forall p \geq 2, \quad U_p = \bigcup_{k=2}^p [X = k]$$

on pouvait effectuer le calcul de v_2 et de v_4 de la façon suivante.

- Calcul de v_2 . Tout d'abord :

$$v_2 = 1 - u_2 = 1 - \mathbb{P}(U_2) = 1 - \mathbb{P}([X = 2]) \quad (\text{d'après la question précédente})$$

Or, d'après la question 1., on sait : $\mathbb{P}([X = 2]) = \frac{1}{4}$. D'où : $v_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

- Calcul de v_4 .

$$v_4 = 1 - u_4 = 1 - \mathbb{P}(U_4)$$

Or, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(U_4) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^4 [X = k]\right) = \sum_{k=2}^4 \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X = 2]) + \mathbb{P}([X = 3]) + \mathbb{P}([X = 4])$$

où la 2^{ème} égalité est obtenue par incompatibilité des événements de l'union (car la famille $([X = k])_{k \in \{-1\} \cup [2, +\infty[}$ est un système complet d'événements).

D'après la question 1., on obtient :

$$\mathbb{P}(U_4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où : } v_4 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

□

9. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée.

Démonstration.

- La suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{k \geq 2} k \mathbb{P}([X = k])$. Or cette série est à termes positifs.

On en déduit que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

Commentaire

- On utilise ici la propriété du cours suivante.

Soit $\sum u_n$ une série et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite des sommes partielles associée.

$\sum u_n$ est à termes positifs $\Rightarrow (S_n)$ est croissante

Rappelons que cette propriété se démontre facilement comme suit.

- Supposons que la série $\sum u_n$ est à termes positifs. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $S_{n+1} - S_n = u_n \geq 0$. Ainsi, (S_n) est croissante.
- Notons que ce résultat peut en fait s'énoncer sous forme d'équivalence. En effet, si (S_n) est croissante, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = S_{n+1} - S_n \geq 0$. On en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. La série $\sum u_n$ est donc à termes positifs.

- Soit $n \geq 2$. D'après la question précédente :

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$$

- Or, pour tout $k \geq 2$, par propriété d'une probabilité :

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_k \leq 1 \\ \text{donc } 1 &\geq 1 - u_k \geq 0 \\ \text{d'où } 1 &\geq v_k \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit : $v_{n+2} \geq 0$ et $v_n \geq 0$. Ainsi : $8v_{n+2} \geq 0$ et $nv_n \geq 0$. On obtient :

$$\begin{aligned} 8v_{n+2} + nv_n &\geq 0 \\ \text{donc } -8v_{n+2} - nv_n &\leq 0 \\ \text{d'où } 6 - 8v_{n+2} - nv_n &\leq 6 \\ \text{ainsi } S_n &\leq 6 \end{aligned}$$

On en conclut que la suite (S_n) est majorée par 6.

□

10. Montrer que X admet une espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum k \mathbb{P}([X = k])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- De plus, comme précisé en question précédente, la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum_{k \geq 2} k \mathbb{P}([X = k])$. Or, d'après la question précédente, la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est :
 × croissante,
 × majorée par 6.
 Elle est donc convergente. Ainsi, la série $\sum k \mathbb{P}([X = k])$ l'est aussi.

On en déduit que la v.a.r. X admet une espérance.

□

11. a) Démontrer que la suite $(nv_n)_{n \geq 2}$ converge vers un réel λ .

Démonstration.

Soit $n \geq 2$. D'après la question **8.** :

$$nv_n = 6 - 8v_{n+2} - S_n$$

Or :

- × la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est convergente d'après la question précédente.
- × la suite (v_{n+2}) est convergente, car la suite (v_n) l'est. En effet, d'après la question **5.**, la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ converge vers 1. De plus :

$$\forall n \geq 2, \quad v_n = 1 - u_n$$

On en déduit que la suite (v_n) converge vers 0.

La suite $(nv_n)_{n \geq 2}$ est donc convergente en tant que combinaison linéaire de suites convergentes. On note λ sa limite.

□

- b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.
À l'aide de l'égalité démontrée à la question 6., obtenir une contradiction.

Démonstration.

- Supposons : $\lambda \neq 0$. D'après la question précédente : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n v_n = \lambda$. Comme $\lambda \neq 0$, on en déduit : $n v_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \lambda$. D'où :

$$v_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{n}$$

- On obtient alors :

$$\times v_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{n}$$

$$\times \forall n \geq 2, v_n \geq 0$$

- la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann d'exposant 1 (1 $\nless 1$). Elle est donc divergente. Et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\lambda}{n}$ l'est aussi.

(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul)

Par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ est divergente.

Finalement, si $\lambda \neq 0$, alors la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ est divergente.

- On ne suppose plus dans ce point : $\lambda \neq 0$.

D'après la question 6. :

$$\forall k \geq 4, \quad v_k - v_{k+1} = \frac{1}{8} v_{k-2}$$

Soit $n \geq 2$. On somme les égalités précédentes pour k variant de 4 à $n+2$. On obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=4}^{n+2} (v_k - v_{k+1}) &= \sum_{k=4}^{n+2} \left(\frac{1}{8} v_{k-2} \right) \\ \parallel \\ v_4 - v_{n+3} &\quad \quad \quad (\text{par télescope}) \end{aligned}$$

De plus :

$$\sum_{k=4}^{n+2} \left(\frac{1}{8} v_{k-2} \right) = \frac{1}{8} \sum_{k=4}^{n+2} v_{k-2} = \frac{1}{8} \sum_{k=2}^n v_k \quad (\text{par décalage d'indice})$$

On en déduit :

$$\sum_{k=2}^n v_k = 8(v_4 - v_{n+3})$$

- Or, d'après la question précédente, la suite (v_n) converge vers 0. On en déduit que la suite $\left(\sum_{k=2}^n v_k \right)_{n \geq 2}$ est convergente (elle converge vers $8v_4$).

On en conclut que la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ est convergente.

- Démontrons par l'absurde : $\lambda = 0$.

Supposons : $\lambda \neq 0$. Alors :

× d'après le 1^{er} point, la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ est divergente.

× d'après le 2^{ème} point, la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ est convergente.

Absurde !

On en déduit : $\lambda = 0$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n v_n = 0$.

□

c) Donner alors la valeur de l'espérance de X .

Démonstration.

- D'après la question 8., pour tout $n \geq 2$:

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - n v_n$$

- Or :

× d'après la question 10., la v.a.r. X admet une espérance et, par définition de $(S_n)_{n \geq 2}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \mathbb{E}(X).$$

× d'après la preuve de la question 11.a) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+2} = 0$.

× d'après la question 11.b) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n v_n = 0$.

On en déduit : $\mathbb{E}(X) = 6 - 8 \times 0 - 0 = 6$.
(ce qui est bien ce qu'on avait conjecturé en question 3.c))

□