DS2 (vB)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Problème 1

Partie I : Un développement en série

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par : pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$.

2. ***a)*** Soit $x \in]0,1[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t,$$

où $f^{(0)} = f$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k^{e} de f.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

3. Soit $x \in]0,1[$ fixé.

a) Montrer que la fonction $\varphi_x \,:\, t \mapsto \dfrac{x-t}{1-t}$ est décroissante sur l'intervalle $[0,x]$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant 2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right).$$

c) On **admet** que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Montrer que :

$$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

d) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0.$$

4. Soit x un réel de $]0,1[$.
Montrer que la série $\sum \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

Partie II : Une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit p un réel fixé de $]0,1[$. On considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi (appelée loi de *Rademacher* de paramètre p), vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}([Y_n = 1]) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([Y_n = -1]) = 1 - p.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, en fonction de p, l'espérance et la variance de Y_n.

On introduit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définie par récurrence :

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = X_n + Y_n \end{cases}$$

6. Simulation informatique.

a) Écrire une fonction **Python** nommée `Rademacher(p)` qui simule une variable aléatoire suivant la loi de Rademacher de paramètre p.

b) Écrire alors une fonction **Python** nommée `simul_traj_X(n,p)` qui simule les variables aléatoires $X_0, \dots, X_n$ et renvoie le résultat sous la forme d'une liste $[X_0, X_1, \dots, X_n]$.

7. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \dfrac{Y_n + 1}{2}$.

a) Reconnaître la loi de Z_n. On précisera son (ou ses) paramètre(s).

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de $\sum\limits_{k=0}^{n-1} Z_k$?

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} Z_k - n$.

8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}([X_n = 0])$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_{2n+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

On **admet** pour la suite le *lemme de Borel-Cantelli.*

Lemme de Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$ puis on pose $B = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$.
Si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(B) = 0$.

9. On suppose dans cette question que $p \neq \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que $0 < p(1-p) < \dfrac{1}{4}$.

b) À l'aide de la Partie I, montrer que la série $\sum p_{2n}$ converge et préciser sa somme.
En déduire que la série $\sum p_n$ converge aussi et interpréter ce résultat à l'aide du lemme de Borel-Cantelli.

10. On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que $p_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

b) Montrer que la série $\sum p_{2n}$ diverge puis que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} p_{2n} = +\infty$.

Problème 2

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie 1 – Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathbb{P}([N = 0]) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([N = k]) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}([N = k - 1])$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.

a) Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([N = k]) = \frac{b^k}{k!} \, \mathbb{P}([N = 0])$$

b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k])$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
Préciser son espérance et sa variance.

2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.

a) Montrer :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathbb{P}([N = k]) = 0$$

b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.

3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0, 1[$.

a) Montrer :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}([Z = k]) = \frac{p}{1 - p} \times \frac{n - k + 1}{k} \times \mathbb{P}([Z = k - 1])$$

b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p.

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.

a) Calculer $\mathbb{P}([N = 1])$. En déduire : $a + b \geqslant 0$.

b) Montrer, pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{m} k \, \mathbb{P}([N = k]) \;=\; a \sum_{k=0}^{m-1} (k + 1) \, \mathbb{P}([N = k]) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N = k])$$

c) En déduire que $\left((1 - a) \sum\limits_{k=1}^{m} k \, \mathbb{P}([N = k])\right)_{m \geqslant 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.
Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de a et b.

d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et :

$$\mathbb{E}\big(N^2\big) \;=\; \frac{(a + b)(a + b + 1)}{(1 - a)^2}$$

e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathbb{V}(N)$ en fonction de a et b.

f) Montrer que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Partie 2 – Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N = k])$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n\, x^n$ est convergente.

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad G(x) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} p_k\, x^k \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k])\, x^k$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\dfrac{b}{a} > 0$.

On pose : $\alpha = \dfrac{-(a+b)}{a}$. On note enfin f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = p_0\,(1 - a\,x)^{\alpha}$$

6. Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [0, 1], \quad f^{(k)}(x) \;=\; k! \times p_k\,(1 - a\,x)^{\alpha - k}$$

7. Soit $x \in [0, 1]$.

a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer :

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} p_k\, x^k + (n+1)\, p_{n+1} \int_0^x (1 - a\,t)^{\alpha - n - 1}\,(x - t)^n \; dt$$

*(On admettra pour cette question que la formule démontrée à la question **2.a)** du **Problème 1** est également valide pour cette fonction f)*

b) Vérifier, pour tout $t \in [0, x]$: $\dfrac{x - t}{1 - at} \leqslant 1$. Puis montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \;\leqslant\; \int_0^x (1 - at)^{\alpha - n - 1}\,(x - t)^n \; dt \;\leqslant\; \int_0^x (1 - at)^{\alpha - 1} \; dt$$

c) En déduire :

$$G(x) \;=\; p_0\,(1 - ax)^{\alpha}$$

En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier : $G'(1) = \mathbb{E}(N)$.

Partie 3 – formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question ***4.*** de la **Partie 1**.
On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geqslant 1 \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = 0 \;\text{ si }\; N(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \;\text{ sinon}$$

8. Calculer $\mathbb{P}([S=0])$ lorsque $a \in]0,1[$ à l'aide de la **Partie 2**.

9. ***a)*** Calculer $\mathbb{P}([S=0])$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

b) On considère la fonction **Python** suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```
def simulX(n):
    y = 0
    for i in range(1, n+1):
        if rd.random() < 1/2:
            y = y + 1
    return y
```

Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser ses paramètres.

c) On rappelle qu'en **Python** l'instruction `rd.poisson(theta)` renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `theta`.
On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre θ, et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.
Recopier et compléter la fonction **Python** suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```
def simulS(theta,n):
    N = rd.poisson(theta)
    ..........
```

(On pourra utiliser autant de lignes que souhaitées)

10. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N=k])$$

et on notera également :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad q_k = \mathbb{P}([X_1=k])$$

On considère pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$. Enfin, on admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S_n = k-j]) \ = \ \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer :

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \quad \mathbb{P}([S=k-j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\, \mathbb{P}([S_n = k-j])$$

b) Montrer :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S=k-j]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

c) Justifier :

$$\mathbb{P}([S=k]) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

d) En déduire finalement :

$$\mathbb{P}([S=k]) \ = \ \frac{1}{1 - a\,q_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{b\,j}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}([S=k-j])$$