

DS2 (vB) - Barème

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `numpy.random` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

Problème 1 (Sujet 0 ECRICOME 2023)

Partie I : Un développement en série

Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par : pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$.

- 2 pts : bonne rédaction de la régularité d'une composée

2. a) Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt,$$

où $f^{(0)} = f$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k^e de f .

- 1 pt : initialisation

- 4 pts : hérédité (dont 1 pt pour l'IPP valide et 1 pt pour $n+1 > 0$ lors du calcul du crochet)

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1[$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} (1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

- 1 pt : initialisation

- 3 pts : hérédité (dont 1 pt pour une tentative bien écrite même si elle n'aboutit pas)

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt.$$

- 1 pt : cas $x = 0$

- 2 pts : cas $x \neq 0$

3. Soit $x \in]0, 1[$ fixé.

a) Montrer que la fonction $\varphi_x : t \mapsto \frac{x-t}{1-t}$ est décroissante sur l'intervalle $[0, x]$.

- 1 pt : $\varphi'_x(t) = (x-1) \frac{1}{(1-t)^2} < 0$ car $x < 1$

0 pt si pas de mention que φ_x est dérivable sur $[0, x]$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n dt \leq 2x^n \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right).$$

- 1 pt : $0 \leq (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n \leq x^n (1-t)^{-\frac{3}{2}}$

- 1 pt : Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant ($0 \leq x$)

- 1 pt : $\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} dt = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 \right)$

c) On admet que

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Montrer que

$$\frac{n+1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

- 1 pt : $(2n+2)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{2n+2}{e} \right)^{2n+2} \sqrt{2\pi(2n+2)}$ ou $(n+1)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n+1}{e} \right)^{n+1} \sqrt{2\pi(n+1)}$
bien écrit

- 2 pts : $\frac{n+1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2n+2)}}{2\pi} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}}$

- 1 pt : $\sqrt{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$

d) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n dt = 0.$$

- 1 pt : $|x| < 1$ donc, par croissances comparées, $\sqrt{n}x^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

- 1 pt : théorème d'encadrement

4. Soit x un réel de $]0, 1[$.

Montrer que la série $\sum \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4} \right)^k$ converge et que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4} \right)^k.$$

- 1 pt : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4} \right)^k = f(x)$

Partie II : Une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit p un réel fixé de $]0, 1[$. On considère une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi (appelée loi de *Rademacher* de paramètre p), vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([Y_n = 1]) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Y_n = -1]) = 1 - p.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, en fonction de p , l'espérance et la variance de Y_n .

- 1 pt : Y_n est finie donc admet une espérance et une variance

- 1 pt : $\mathbb{E}(Y_n) = 1 \times p + (-1) \times (1-p) = 2p - 1$

- 1 pt : $\mathbb{V}(Y_n) = 1 - (2p-1)^2 = 1 - (4p^2 - 4p + 1) = 4p(1-p)$

On introduit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires définie par récurrence :

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = X_n + Y_n \end{cases}$$

6. Simulation informatique.

- a) Écrire une fonction **Python** nommée `Rademacher(p)` qui simule une variable aléatoire suivant la loi de Rademacher de paramètre p .

- 1 pt : `if rd.random() < p:`
- 1 pt : `return 1`
- 1 pt : `return -1`
- 1 pt : syntaxe correcte

```

1 def Rademacher(p):
2     if rd.random() < p:
3         return 1
4     else:
5         return -1

```

- b) Écrire alors une fonction **Python** nommée `simul_traj_X(n,p)` qui simule les variables aléatoires $X_0, \dots, X_n$ et renvoie le résultat sous la forme d'une liste $[X_0, X_1, \dots, X_n]$.

- 1 pt : `L = [0]`
- 1 pt : `for k in range(n):`
- 1 pt : `L.append(L[-1] + Rademacher(p))`
- 1 pt : syntaxe correcte

```

1 def simul_traj_X(n,p):
2     L = [0]
3     for k in range(n):
4         L.append(L[-1] + Rademacher(p))
5     return L

```

7. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \frac{Y_n + 1}{2}$.

- a) Reconnaître la loi de Z_n . On précisera son (ou ses) paramètre(s).

- 1 pt : $Z_n(\Omega) = \{0, 1\}$. On en déduit que Z_n suit une loi de Bernoulli.
- 1 pt : $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ bien justifié

- b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de $\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$?

- 1 pt : Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$
- 1 pt : Les variables aléatoires $Z_0, \dots, Z_{n-1}$ sont mutuellement indépendantes par lemme des coalitions (les variables $Y_0, \dots, Y_{n-1}$ étant mutuellement indépendantes par hypothèse)
- 1 pt : par théorème de stabilité des lois binomiales $\sum_{k=0}^{n-1} Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

- c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n$.

- 1 pt : initialisation
- 1 pt : hérédité

8. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}([X_n = 0])$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

- 1 pt : $p_{2n+1} = 0$

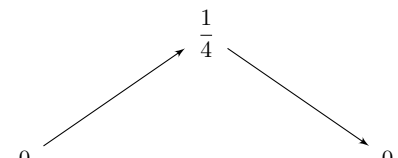
- 1 pt : $\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, p)$

- 1 pt : $p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$

9. On suppose dans cette question que $p \neq \frac{1}{2}$.

a) Montrer que $0 < p(1-p) < \frac{1}{4}$.

- 1 pt : étude de $\varphi : t \mapsto t(1-t)$

t	0	$\frac{1}{2}$	1
Signe de $\varphi'(t)$	+	0	-
Variations de φ			

- 1 pt : $p \in]0, 1[\setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

b) À l'aide de la Partie I, montrer que la série $\sum p_{2n}$ converge et préciser sa somme.

En déduire que la série $\sum p_n$ converge aussi et interpréter ce résultat à l'aide du lemme de Borel-Cantelli.

- 1 pt : $\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} p^k (1-p)^k = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k$ (en posant $x = 4p(1-p)$)

- 1 pt : d'après la question 10.a), $0 < x < 1$

- 1 pt : d'après la question 4, la série $\sum \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}$$

- 1 pt : $\sum_{k=0}^n p_k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p_{2k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} p_{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k$ donc la série $\sum p_n$ converge aussi

- 2 pts : On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [X_n = 0]$, de sorte que le résultat précédent se traduise en : la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. D'après le lemme de Borel-Cantelli, l'événement

« une infinité des événements A_k se réalisent simultanément »

est quasi-impossible. Autrement dit, il est quasi-impossible que lors de la marche aléatoire, on revienne une infinité de fois en 0.

10. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.

a) Montrer que $p_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

- 1 pt : $\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n} \sqrt{2\pi(2n)}}{2\pi n} = 2^{2n} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

- 1 pt : $p_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

b) Montrer que la série $\sum p_{2n}$ diverge puis que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N p_{2n} = +\infty$.

- 1 pt : la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge par critère de Riemann

- 1 pt : par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum p_{2n}$ diverge également

- 1 pt : Puisque il s'agit d'une série à termes positifs, sa suite des sommes partielles est croissante et non majorée et donc elle diverge vers $+\infty$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N p_{2n} = +\infty$$

Problème 2 (Ecricome 2018 voie S)

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie 1 – Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N , à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathbb{P}([N = 0]) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([N = k]) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}([N = k - 1])$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.

a) Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([N = k]) = \frac{b^k}{k!} \mathbb{P}([N = 0])$$

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

b) Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k])$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b .
Préciser son espérance et sa variance.

- 2 pts : $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) = \mathbb{P}([N = 0]) e^b$ (dont 1 pt pour justification convergence)

- 2 pts : $\mathbb{P}([N = 0]) = e^{-b}$ (dont 1 pt pour $([N = k])_{k \in \mathbb{N}}$ SCE)

- 1 pt : $N \hookrightarrow \mathcal{P}(b)$ donc $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) = b$

2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.

a) Montrer :

$$\forall k \geq 2, \quad \mathbb{P}([N = k]) = 0$$

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a .

- 1 pt : N suit une loi $\mathcal{B}(p)$ où $p = \mathbb{P}([N = 1])$

- 2 pts : $\mathbb{P}([N = 1]) = -\frac{a}{1-a}$

3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

a) Montrer :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}([Z = k]) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}([Z = k-1])$$

- 2 pts

b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p .

- 1 pt : $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}([Z = 0]) \neq 1$

- 3 pts : cas $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (dont 1 pt pour $a = -\frac{p}{1-p}$, 1 pt pour $b = \frac{p}{1-p} (n+1)$)

- 1 pt : cas $k = n+1$

- 1 pt : cas $k \in \llbracket n+2, +\infty \rrbracket$

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.

a) Calculer $\mathbb{P}([N = 1])$. En déduire : $a + b \geq 0$.

- 1 pt : $\mathbb{P}([N = 1]) = (a + b) \mathbb{P}([N = 0])$

- 1 pt : $a + b \geq 0$

b) Montrer, pour tout entier $m \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^m k \mathbb{P}([N = k]) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \mathbb{P}([N = k]) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N = k])$$

- 2 pts : 1 pt pour utilisation relation de Panjer, 1 pt pour décalage d'indice

c) En déduire que $\left((1-a) \sum_{k=1}^m k \mathbb{P}([N = k]) \right)_{m \geq 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance. Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de a et b .

- 1 pt : $(1-a) \sum_{k=1}^{m-1} k \mathbb{P}([N = k]) = (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N = k]) - m \mathbb{P}([N = m])$

- 1 pt : $(1-a) \sum_{k=1}^{m-1} k \mathbb{P}([N = k]) \leq (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N = k])$

- 1 pt : $\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N = k]) \leq 1$

- 1 pt : $(1-a) \sum_{k=1}^{m-1} k \mathbb{P}([N = k]) \leq a+b$ (car $a+b \geq 0$)

- 1 pt : $\left(\sum_{k=1}^m k \mathbb{P}([N = k]) \right)_{m \geq 1}$ converge (par théorème de limite monotone)

- 1 pt : $\lim_{m \rightarrow +\infty} m \mathbb{P}([N = m]) = 0$

- 1 pt : $\mathbb{E}(N) = \frac{a+b}{1-a}$

d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et :

$$\mathbb{E}(N^2) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$$

- 1 pt : convergence absolue

- 2 pts : $(1-a) \sum_{k=0}^{m-1} k^2 \mathbb{P}([N = k]) = (2a+b) \sum_{k=0}^{m-1} k \mathbb{P}([N = k]) + (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N = k]) - m^2 \mathbb{P}([N = m])$

- **1 pt** : $\sum_{k=0}^{m-1} k^2 \mathbb{P}([N = k]) \leq \frac{2a+b}{1-a} \sum_{k=0}^{m-1} k \mathbb{P}([N = k]) + \frac{a+b}{1-a} \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{P}([N = k])$
- **1 pt** : $\sum_{k=0}^{m-1} k^2 \mathbb{P}([N = k]) \leq \frac{2a+b}{1-a} \mathbb{E}(N) + \frac{a+b}{1-a}$
- **1 pt** : N admet un moment d'ordre 2 (théorème de la limite monotone)
- **2 pts** : $\mathbb{E}(N^2) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$

e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathbb{V}(N)$ en fonction de a et b .

- **1 pt** : N admet une variance

- **1 pt** : $\mathbb{V}(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}$

f) Montrer que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

- **1 pt** : $(\Leftarrow)$

- **4 pts** : $(\Rightarrow)$ (**1 pt pour** : $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) \Leftrightarrow a = 0$ OU $a+b = 0$, **2 pts pour** $a = 0$ (par l'absurde), **1 pt pour** $b > 0$)

Partie 2 – Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N = k])$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$, la série $\sum_{n \geq 0} p_n x^n$ est convergente.

- **1 pt** : cas $x = 1$

- **3 pts** : cas $x \in [0, 1[$ (**critère de comparaison des SATP**)

On appelle alors **fonction génératrice de N** la fonction G définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) x^k$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\frac{b}{a} > 0$. On

pose : $\alpha = \frac{-(a+b)}{a}$.

On note enfin f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = p_0 (1 - ax)^\alpha$$

6. Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [0, 1], \quad f^{(k)}(x) = k! \times p_k (1 - ax)^{\alpha-k}$$

- **2 pts** : f_0 de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ (**dont 1 pt pour démontrer** $h_1([0, 1]) \subset]0, +\infty[$)

- **1 pt** : initialisation

- **3 pts** : hérédité

7. Soit $x \in [0, 1]$.

a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k + (n+1) p_{n+1} \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt$$

- 3 pt : récurrence

b) Vérifier, pour tout $t \in [0, x]$: $\frac{x-t}{1-at} \leq 1$. Puis montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt \leq \int_0^x (1-at)^{\alpha-1} dt$$

- 2 pts : $\frac{x-t}{1-at} \leq 1$

- 1 pt : $0 \leq (1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n \leq (1-at)^{\alpha-1}$

- 1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant

c) En déduire :

$$G(x) = p_0 (1-ax)^\alpha$$

En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a , b et α , et vérifier : $G'(1) = \mathbb{E}(N)$.

- 2 pts : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) p_{n+1} \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1} (x-t)^n dt = 0$

- 1 pt : $f(x) = G(x)$ (d'après 5.)

- 1 pt : $G(1) = 1$

- 1 pt : $p_0 = \frac{1}{(1-a)^\alpha}$

- 1 pt : $G'(1) = \frac{a+b}{1-a} = \mathbb{E}(N)$

Partie 3 – formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question 4. de la **Partie 1**.

On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \sum_{k=1}^N X_k & \text{si } N \geq 1 \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = 0 \quad \text{si } N(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \quad \text{sinon}$$

8. Calculer $\mathbb{P}([S = 0])$ lorsque $a \in]0, 1[$ à l'aide de la **Partie 2**.

- 1 pt : **FPT sur le SCE** $([N = i])_{i \in \mathbb{N}}$

- 1 pt : $\mathbb{P}([S = 0] \cap [N = 0]) = p_0 = \frac{1}{(1-a)^\alpha}$

- 1 pt : $[S = 0] \cap [N = i] = \left[\sum_{k=1}^i X_k = 0 \right] \cap [N = i]$

- 1 pt : $\left[\sum_{k=1}^i X_k = 0 \right] = \bigcap_{k=1}^i [X_k = 0]$
- 2 pts : $\mathbb{P}([S = 0] \cap [N = i]) = p_i x_0^i$ où $x_0 = \mathbb{P}([X_1 = 0])$ (1 pt pour indépendance mutuelle, 1 pt pour les X_i ont même loi)
- 2 pts : $\mathbb{P}([S = 0]) = G(x_0)$
- 1 pt : $\mathbb{P}([S = 0]) = \left(\frac{1 - a x_0}{1 - a} \right)^\alpha$

9. a) Calculer $\mathbb{P}([S = 0])$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ .

- 1 pt : $\mathbb{P}([S = 0] \cap [N = 0]) = e^{-\lambda}$
- 1 pt : $\mathbb{P}([S = 0] \cap [N = i]) = \frac{(\lambda x_0)^i}{i!} e^{-\lambda}$
- 2 pts : $\mathbb{P}([S = 0]) = e^{-(1-x_0)\lambda}$ où $x_0 = \mathbb{P}([X_1 = 0])$

b) On considère la fonction **Python** suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```

1 def simulX(n):
2     y = 0
3     for i in range(1, n+1):
4         if rd.random() < 1/2:
5             y = y + 1
6     return y

```

Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX`? Préciser ses paramètres.

- 2 pts : simulation d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

c) On rappelle qu'en **Python** l'instruction `rd.poisson(theta)` renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `theta`.

On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre θ , et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.

Recopier et compléter la fonction **Python** suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```

1 def simulS(theta,n):
2     N = rd.poisson(theta)
3     .....
4     .....
5     .....
6     .....

```

- 4 pts : 1 pt pour initialisation `s`, 2 pts pour boucle `for`, 1 pt bonus si tout est juste

```

1 def simulS(theta, n):
2     N = rd.poisson(theta)
3     S = 0
4     for k in range(N):
5         S = S + simulX(n)
6     return S

```

10. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}([N = k])$$

et on notera également :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad q_k = \mathbb{P}([X_1 = k])$$

On considère pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$. Enfin, on admet le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}([S_n = k - j]) = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer :

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathbb{P}([S = k - j]) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathbb{P}([S_n = k - j])$$

- **1 pt : FPT sur le SCE** $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$

- **1 pt :** $[N = 0] \cap [S = k - j] = [N = 0] \cap [S_0 = k - j]$

- **1 pt :** $[N = n] \cap [S = k - j] = [N = n] \cap [S_n = k - j]$

b) Montrer :

$$\sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}([S = k - j]) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

- **3 pts**

c) Justifier :

$$\mathbb{P}([S = k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \mathbb{P}([S_{n+1} = k])$$

- **2 pts : 1 pt pour** $\mathbb{P}([S = k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathbb{P}([S_n = k])$, **1 pt pour décalage d'indice**

d) En déduire finalement :

$$\mathbb{P}([S = k]) = \frac{1}{1 - a q_0} \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}([S = k - j])$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}([S = k]) = \sum_{j=0}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}([S = k - j])$

- **1 pt :** $(1 - a q_0) \mathbb{P}([S = k]) = \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}([S = k - j])$

- **1 pt :** $\mathbb{P}([S = k]) = \frac{1}{1 - a q_0} \sum_{j=1}^k \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathbb{P}([S = k - j])$ (**car** $1 - a q_0 \neq 0$)