DS2 (vA) - Barème

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy` et `numpy.random` de **Python** sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

Exercice 1 (ECRICOME 2008)

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On note $E = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ puis donner la dimension de E.

- **2 pts :** $E = \text{Vect}\,(I, A)$
- **1 pt :** (I, A) **est libre**
- **1 pt :** $\dim(E) = 2$

2. a) Montrer que l'ensemble $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ est un espace vectoriel. Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de F puis donner la dimension de F.

- **1 pt : écriture système** $\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$
- **1 pt : résolution** $\{\ x = y + 2z$
- **1 pt : écriture sous forme de sev engendré :** $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$**.**
- **1 pt : La famille** $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ **est libre**
- **1 pt :** $\dim(F) = 2$

b) Montrer que l'ensemble $G = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$ est un espace vectoriel. Déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de G puis donner la dimension de G.

- **1 pt : écriture système** $\begin{cases} -y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$
- **1 pt : résolution** $\begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}$
- **1 pt : écriture sous forme de sev engendré :** $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$**.**

- **1 pt : La famille** $\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$ **est libre**
- **1 pt :** $\dim(G) = 1$

3. a) Montrer que $F \cap G = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

- **1 pt :** $\supset$
- **2 pts :** $\subset$

b) Montrer que la famille $\mathscr{B}$ obtenue en réunissant les vecteurs de la base $\mathscr{B}_1$ de F et de la base $\mathscr{B}_2$ de G forme une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- **2 pts :** $\mathscr{B}$ **libre**
- **1 pt :** $\text{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim\left(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$

c) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, puis celles du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, dans la base $\mathscr{B}$.

- **1 pt :** $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **a pour coordonnées** $(1,0,0)$ **dans** $\mathscr{B}$**.**
- **2 pts :** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **a pour coordonnées** $(5,-1,2)$ **dans** $\mathscr{B}$**.**

4. On considère la matrice P définie par $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

- **3 pts :** $P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\-2 & 3 & 4\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

- **1 pt :** $AP = \begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\4 & 1 & 0\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **ou** $P^{-1}A = \begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\-2 & 3 & 4\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$
- **1 pt :** $D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

5. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Prouver que la matrice $D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P$ est une matrice diagonale.

- **1 pt :** $M(a,b) = a \cdot I + b \cdot A$
- **1 pt :** $D(a,b) = a \cdot I + b \cdot D$

b) Montrer que $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $D(a,b)$ est inversible.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a,b)$ soit inversible.

- **2 pts :** $M(a,b)$ **inversible** $\Leftrightarrow$ $D(a,b)$ **inversible (1 pt par implication)**
- **1 pt :** $M(a,b)$ **inversible ssi** $\begin{cases} a+2b \neq 0 \\ a+b \neq 0 \end{cases}$

c) Prouver que $\big(M(a,b)\big)^2 = I$ si et seulement si $\big(D(a,b)\big)^2 = I$.
En déduire l'existence de quatre matrices $M(a,b)$ que l'on déterminera, vérifiant :

$$\big(M(a,b)\big)^2 = I$$

- **2 pts :** $\big(M(a,b)\big)^2 = I \;\Leftrightarrow\; \big(D(a,b)\big)^2 = I$
- **1 pt : obtention 4 systèmes**
- **2 pts : résolutions (1/2 pt par système) :** $M(1,0)$**,** $M(-3,2)$**,** $M(3,-2)$ **et** $M(-1,0)$

Exercice 2 (EDHEC 2026)

On considère un nombre réel a strictement supérieur à 1, ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = a$ et par la relation de récurrence, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$$

1. Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle retourne la valeur de u_n pour des valeurs données de n et de a :

```
1  def suite_u(a,n):
2      u=------
3      for k in range(1,n+1):
4          u=------
5      return u
```

- **1 pt :** `u= a`
- **1 pt :** `u= u**2 - u + 1`

2. Montrer que si l'on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est $\ell = 1$.

- **1 pt : argument de continuité**
- **1 pt :** $\ell = \ell^2 - \ell + 1$ **en citant le passage à la limite**
- **1 pt : résolution de** $x^2 - 2x + 1 = 0$ **par factorisation ou étude du discriminant**

3. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- **1 pt :** $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geqslant 0$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant a$.

- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : hérédité**

c) Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- **1 pt : hypothèse** (u_n) **majorée**
- **1 pt : thm de convergence monotone**
- **1 pt :** $1 \geqslant a$ **contradiction**

4. À l'aide de la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la question précédente, préciser laquelle des quatre propositions suivantes est vraie et justifier l'équivalent choisi :

❶ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n$. ❷ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} u_n^2$. ❸ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u_n^2}$. ❹ $u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u_n}$.

- 1 pt : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n^2} = 1 - \dfrac{2}{u_n} + \dfrac{1}{u_n^2}$

- 1 pt : penser à justifier que $u_n \neq 0$

5. a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{u_n - 1} - \dfrac{1}{u_{n+1} - 1}$ existe et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n}$$

- 1 pt : existence

- 2 pt : calcul bien détaillé

b) En déduire, pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k}$ en fonction de a et u_{n+1}.

- 1 pt : $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k} = \dfrac{1}{a-1} - \dfrac{1}{u_{n+1} - 1}$

- 1 pt : citer le télescopage

c) Conclure que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ converge et donner sa somme en fonction de a.

- 1 pt : $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{a-1}$

- 1 pt : la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ **converge et** $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{u_k} = \dfrac{1}{a-1}$

Dans toute la suite, on suppose que $a = 2$.

6. a) Montrer que l'on définit bien la loi d'une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{u_n}$$

- 1 pt : $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{u_k} = \dfrac{1}{a-1} = \dfrac{1}{2-1} = 1$

- 1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_n} > 0$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a $2^n(2^n - 1) + 1 \geqslant 2^{n+1}$.

- 2 pt : preuve bien détaillée par étapes

c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a l'inégalité $u_n \geqslant 2^n$ puis vérifier que cette dernière inégalité reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

- 1 pt : cas $n = 0$ **et** $n = 1$ **(**$u_0 = 2$**,** $u_1 = 3$**)**

- 1 pt : initialisation (cas $n = 2$**,** $u_2 = 7$**)**

- 2 pt : hérédité

d) Établir que X possède une espérance et une variance que l'on ne cherchera pas à calculer.

- 1 pt : X **possède une variance ssi la série** $\sum n^2\mathbb{P}(X = n)$ **converge** ***(car il s'agit d'une série à termes positifs)***

- 1 pt : $\dfrac{k^2}{u_k} \leqslant \dfrac{k^2}{2^k} = \dfrac{k(k-1)}{2^k} + \dfrac{k}{2^k} = k(k-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^k + k\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$

- 1 pt : on reconnaît les termes généraux de séries géométriques dérivées et dérivées seconde de raison $q = \dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$**, qui sont donc convergentes**

- 1 pt : par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum n^2\mathbb{P}(X = n)$ **converge et donc que** X **possède une variance et une espérance**

Exercice 3 (ECRICOME 2021)

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.
On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.
On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs. Si on obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1.
Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face,... alors X prend la valeur 5.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au $n^{\text{ème}}$ lancer ».
- P_n : « Obtenir Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

La suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.
Pour tout entier n supérieur ou égal 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs ».
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n \ = \ \mathbb{P}(U_n) \qquad \text{et} \qquad a_n \ = \ \mathbb{P}(\,[X=n]\,)$$

Partie A

1. Exprimer les événements $[X=2]$, $[X=3]$ et $[X=4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k. En déduire les valeurs de a_2, a_3 et a_4.

- **1 pt :** $a_2 = \dfrac{1}{4}$ $\left([X=2] = P_1 \cap P_2\right)$
- **1 pt :** $a_3 = \dfrac{1}{8}$ $\left([X=3] = F_1 \cap P_2 \cap P_3\right)$
- **1 pt :** $a_4 = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$ $\left([X=4] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)\right)$
- **1 pt : argument d'indépendance**
- **1 pt : argument d'incompatibilité**

2. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \sum_{k=2}^{n} a_k$.

- **1 pt :** $U_n = \bigcup_{k=2}^{n} [X=k]$
- **1 pt : argument d'incompatibilité**

3. a) Recopier et compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```
1  def simulX():
2      tirs = 0
3      pile = 0
4      while pile __< 2__ :
5          if rd.random() < 1/2:
6              pile = pile + 1
7          else:
8              pile = __0___
9          tirs = __tirs + 1__
10     return tirs
```

- 4 pts total :

- **1 pt par ligne**
- **1 pt bonus si tout est juste**

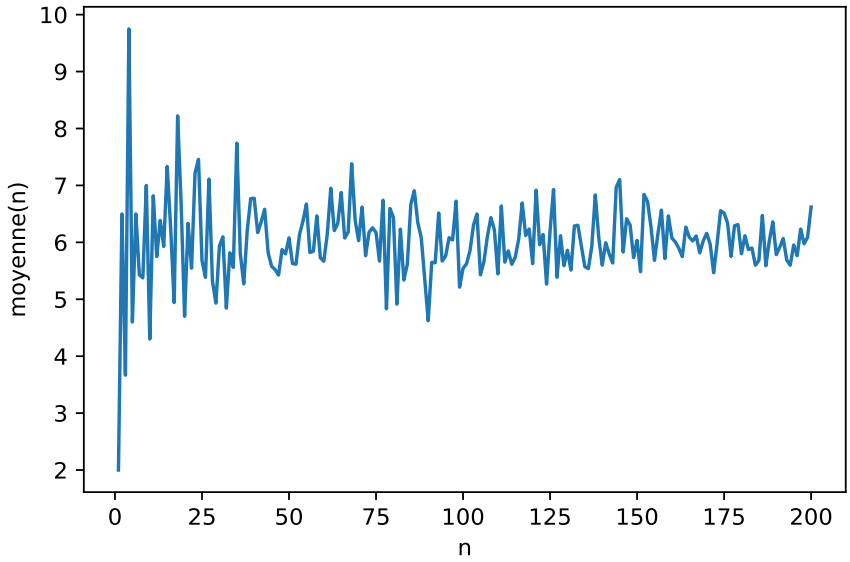
b) Écrire une fonction **Python** nommée `moyenne(n)` qui simule `n` fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

- 5 pts total :

```
1  def moyenne(n):
2      S = 0
3      for k in range(n):
4          S = S + simulX()
5      return S/n
```

- **1 pt :** `S = 0`
- **1 pt :** `for k in range(n):`
- **1 pt :** `S = S + simulX()`
- **1 pt :** `return S/n`
- **1 pt bonus si tout est correct**

c) On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier `n` de $[\![1, 200]\!]$, et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) \approx 6$
- **1 pt : Loi faible des grands nombres**

Partie B

4. a) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(U_{n+1}) \;=\; \mathbb{P}(U_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n \cap B_{n+1})$$

- **1 pt :** $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$
- **1 pt : formule du crible**

b) Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} \;=\; (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

- **1 pt :** $U_n \cap B_{n+1} = \big(U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1}\big) \cup \big(U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1}\big)$
- **1 pt :** $U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1} = U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$
- **1 pt :** $U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1} = B_n \cap P_{n+1} = P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$u_{n+1} \;=\; u_n + \frac{1}{8}\,(1 - u_{n-2})$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$
- **1 pt : Comme les lancers sont indépendants, les événements U_{n-2} et $F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$ sont indépendants**
- **1 pt : argument d'incompatibilité**
- **1 pt : calcul correct**

5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.

- **1 pt :** $u_{n+1} - u_n \;=\; \dfrac{1}{8}\,(1 - u_{n-2}) \geqslant 0$ **car** $u_{n-2} = \mathbb{P}(U_{n-2}) \leqslant 1$
- **1 pt : suite croissante et majorée + thm de convergence monotone**
- **1 pt :** $\ell = \ell + \dfrac{1}{8}\,(1 - \ell)$ **donc** $\ell = 1$

On **admet** que :

$$\mathbb{P}(\,[X = -1]\,) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 1 - \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

Partie C

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$v_n \;=\; 1 - u_n \qquad \text{et} \qquad S_n \;=\; \sum_{k=2}^{n} k\,\mathbb{P}(\,[X = k]\,)$$

6. Démontrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$v_n - v_{n+1} \;=\; \frac{1}{8}\, v_{n-2}$$

- 1 pt : calcul correct

7. Justifier, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}(\,[X = n+1]\,) \;=\; v_n - v_{n+1}$$

- 1 pt : $U_{n+1} \;=\; U_n \cup [X = n+1]$

- 1 pt : Les événements $[X = n+1]$ **et** U_n **sont de plus incompatibles puisqu'on ne peut obtenir pour la première fois deux « Pile » consécutifs au** $(n+1)^{\text{ème}}$ **lancer et à la fois les avoir obtenus au cours des** n **premiers lancers**

- 1 pt : $\mathbb{P}([X = n+1]) \;=\; \mathbb{P}(U_{n+1}) - \mathbb{P}(U_n) \;=\; u_{n+1} - u_n \;=\; (1 - v_{n+1}) - (1 - v_n) \;=\; v_n - v_{n+1}$

8. Démontrer alors par récurrence, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n \;=\; 6 - 8\, v_{n+2} - n\, v_n$$

- 3 pts : initialisation pour $n = 2$

- **1 pt :** $S_2 \;=\; \displaystyle\sum_{k=2}^{2} k\, \mathbb{P}([X = k]) \;=\; 2\, \mathbb{P}([X = 2]) \;=\; 2 \times \frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{2}$
- **1 pt :** $v_2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$
- **1 pt :** $v_4 = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

- 2 pts : hérédité

9. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est croissante et majorée.

- 1 pt : La suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ **est la suite des sommes partielles de la série** $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} k\, \mathbb{P}([X = k])$**. Or cette série est à termes positifs. Donc** $(S_n)_{n \geqslant 2}$ **est croissante**

- 1 pt : $S_n \leqslant 6$

10. Montrer que X admet une espérance.

- 1 pt : La v.a.r. X **admet une espérance si et seulement si la série** $\sum\, k\, \mathbb{P}([X = k])$ **est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente**

- 1 pt : (S_n) **converge par thm de convergence monotone donc la série** $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} k\, \mathbb{P}([X = k])$ **converge**

11. a) Démontrer que la suite $(n\, v_n)_{n \geqslant 2}$ converge vers un réel λ.

- 1 pt : $n\, v_n \;=\; 6 - 8\, v_{n+2} - S_n$

- 1 pt : (S_n) **converge et** $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.
À l'aide de l'égalité démontrée à la question ***6.***, obtenir une contradiction.

- **1 pt : si $\lambda \neq 0$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$ et donc la série $\sum v_n$ diverge par critère de Riemann**
- **1 pt : or, la série $\sum v_n$ converge (télescopage cf question 7)**
- **1 pt : qualité de la rédaction**

c) Donner alors la valeur de l'espérance de X.

- **1 pt :** $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 6 - 8 \times 0 - 0 = 6$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 6$